MATHEMATICAL SCIENCES LIBRARY
3 1761 05552305 4

RESENTED

by

PROF. K.O. MAY

UNIVERSITY OF TORONTO
DEPT. OF MATHEMATICS
LIBRARY

UNIVERSITY OF TORONTO
DEPT. OF MATHEMATICS
LIBRARY

JUL 23 197

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/mmoiresurlesso00darb

MÉMOIRES

PRÉSENTÉS PAR DIVERS SAVANTS

A L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

TOME XXVII. — N° 2.

MÉMOIRE

SUR

LES SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS

AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE,

PAR M. G. DARBOUX.

INTRODUCTION.

Dans un mémoire inséré au tome IV des OEuvres complètes, Lagrange s'occupe des intégrales singulières (qu'il appelle *solutions particulières*) des équations différentielles et aux dérivées partielles de tous les ordres. Pour ce qui concerne les équations aux dérivées ordinaires du premier ordre, il est conduit à la règle suivante :

Étant donnée une équation différentielle

$$F(x, y, y') = 0,$$

la solution particulière devra satisfaire aux deux équations

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

lesquelles, dit-il, devront s'accorder. Il ne précise pas davantage et n'indique pas ainsi si elles s'accordent nécessairement, ou s'il

est nécessaire qu'elles s'accordent pour qu'il y ait une solution singulière.

Dans une autre partie de son mémoire, considérant les courbes représentées par une équation générale contenant un paramètre arbitraire, et qui satisfont par conséquent à une même équation différentielle du premier ordre, il fait remarquer que ces courbes auront une enveloppe qui satisfera nécessairement à la même équation différentielle, sans être identique à aucune d'elles et, par conséquent, sans être comprise dans ce qu'on nomme l'intégrale complète ou générale. Toute la discussion de Lagrange repose nécessairement sur l'hypothèse qu'une équation différentielle quelconque admet une intégrale générale finie et continue, dans une étendue du plan suffisante pour qu'on puisse appliquer les principes de la théorie des enveloppes. Cette hypothèse, quoique non justifiée, était universellement admise du temps de Lagrange. Tous les auteurs, et ils sont nombreux, qui ont écrit sur ce sujet, font la théorie des solutions singulières en partant de l'intégrale complète contenant une constante arbitraire, et ils supposent toujours, d'une manière plus ou moins explicite, qu'elle demeure une fonction bien déterminée de cette constante. C'est ainsi que Poisson, dans un mémoire inséré au 13ᵉ cahier du *Journal de l'École polytechnique*, se préoccupe avant tout de reconnaître si une solution donnée d'une équation différentielle est une solution singulière, ou si elle peut être complétée de manière à contenir une constante arbitraire et à devenir alors un cas particulier de l'intégrale générale.

La théorie de Lagrange consistant à considérer les solutions singulières comme les enveloppes des courbes représentées par l'intégrale générale constitue certainement ce qu'on a écrit de plus simple et de plus net sur ce sujet difficile. Mais elle conduisait à cette conclusion qu'étant donnée une équation différentielle, il y aura d'une manière normale une solution singulière, ne disparaissant que dans les cas exceptionnels, et devant satisfaire aux deux équations que nous avons données plus haut.

Or il n'est pas difficile de se convaincre qu'étant donnée une équation différentielle formée directement d'une manière quelconque, les trois équations

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0,$$

ne sont pas satisfaites en général, pour tous les points d'une courbe; en sorte que l'application de la règle même qui semblait établie pour la recherche des solutions singulières conduit à cette conclusion qu'il n'y a pas, en général, de telle solution.

L'explication de ce paradoxe est facile à donner. Lagrange et ses successeurs admettaient l'existence d'une intégrale complète finie et continue dans toute l'étendue nécessaire pour qu'on puisse chercher l'enveloppe des courbes qu'elle représente. Ils excluaient donc, sans même le dire, le cas où ces courbes auraient des points singuliers, cesseraient d'être continues ou même d'exister au delà d'une région limitée du plan. Nous avons aujourd'hui des notions plus précises sur les intégrales des équations différentielles. Une fonction y satisfaisant à une équation différentielle du premier ordre est, certainement, dans une étendue limitée, une fonction continue à la fois de la variable indépendante et de sa valeur initiale, qui peut alors jouer le rôle de constante arbitraire. Mais cette intégrale complète cesse précisément d'être bien déterminée dans la région du plan où la courbe qu'elle représente serait coupée par la courbe infiniment voisine. Il résulte, en effet, des principes établis dans le beau mémoire de MM. Briot et Bouquet, que cette courbe acquiert généralement un rebroussement aux points où l'équation en $\frac{dy}{dx}$ admet deux racines égales.

En général, l'élimination de y' entre les deux équations

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

donne le lieu des points de rebroussement des courbes intégrales; ce lieu ne devient une solution que si la forme de la fonction F a été choisie d'une manière convenable.

Il importe donc de distinguer soigneusement les équations différentielles formées par l'élimination des constantes, par exemple entre les équations algébriques et leurs dérivées, et celles dont l'origine est quelconque et tout à fait inconnue. Les premières, la théorie de Lagrange le démontre nettement, ont généralement une solution singulière. Les autres n'en ont que d'une manière tout à fait exceptionnelle.

Une remarque bien simple explique pourquoi cette distinction, qui, si elle avait été faite tout d'abord, eût pu contribuer beaucoup au progrès de la théorie des équations différentielles, n'a été exposée que dans ces derniers temps. Les équations dont on s'est surtout occupé, quoiqu'on ne les considère plus exclusivement, sont celles qu'on peut intégrer, c'est-à-dire celles pour lesquelles il existe une intégrale générale qui, formée avec des fonctions simples et entières, est le plus souvent finie et continue et donne, par conséquent, naissance à une intégrale singulière. On a été ainsi conduit à donner à la théorie de Lagrange une extension et une portée qui n'étaient sans doute pas dans la pensée de ce grand géomètre.

Les conclusions précédentes s'appliquent sans aucune modification aux équations aux dérivées partielles. Ici encore, il importe de séparer les équations obtenues par l'élimination des constantes de celles qui ont été formées directement d'une manière quelconque. Les premières ont le plus souvent une intégrale singulière, qui est l'enveloppe des intégrales que Lagrange nommait complètes; les secondes n'en présentent que dans des cas tout à fait exceptionnels. De là résulte la nécessité de distinguer, dans cette étude, ces deux classes d'équations. J'ai commencé mon travail par l'examen de celles qui résultent de l'élimination des constantes, afin d'obtenir des résultats précis, permettant de reconnaître et de définir la solution singulière, quand elle existe.

La première partie est consacrée à l'étude détaillée et géométrique des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. Elle peut être considérée comme une exposition com-

plète de la méthode des caractéristiques de Monge. J'étudie avec soin toutes les espèces différentes d'intégrales d'une équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, les conditions diverses auxquelles on peut les assujettir, afin de bien établir, d'une part, les caractères qui distinguent l'intégrale singulière de toutes les autres intégrales, et, d'autre part, de bien reconnaître les relations de contact que présente l'intégrale singulière, soit avec les autres intégrales, soit avec les caractéristiques. J'indique ainsi plusieurs propriétés de l'intégrale singulière. Elle est l'enveloppe des intégrales complètes; il passe en chacun de ses points et dans la direction de chacune de ses tangentes une caractéristique; si l'on trace sur elle une courbe quelconque, il y a deux surfaces intégrales tangentes l'une à l'autre en tous les points de cette courbe, l'intégrale singulière et une intégrale générale, etc. Chacune de ces propriétés conduit à la même règle pour obtenir l'intégrale singulière au moyen de l'équation aux dérivées partielles et sans passer par l'intégrale complète, supposée inconnue.

Je signalerai dans cette partie de mon travail quelques résultats qui me paraissent nouveaux. Les caractéristiques une fois connues, il importe de savoir comment on doit les associer pour former une intégrale. Ceci me conduit à dire quelques mots de la génération des surfaces par des courbes qui se déplacent et se déforment d'une manière continue sans se couper. Les unes sont analogues aux surfaces gauches, et la distance de deux génératrices infiniment voisines est du même ordre dans toute l'étendue de la surface. Pour les autres, qui sont analogues aux surfaces développables, les génératrices admettent une enveloppe, c'est-à-dire une courbe qui leur est tangente. Généralisant alors un beau théorème de M. Bouquet, je prouve que, dans le voisinage de l'enveloppe, la plus courte distance de deux courbes infiniment voisines n'est jamais du second ordre, mais qu'elle est au moins du troisième. Dans ce cas, la courbe enveloppe de toutes les génératrices est réellement une arête de rebroussement, en tous les points de laquelle deux nappes de la surface viennent se raccorder, qui, en un

mot, est géométriquement semblable à celle des surfaces développables.

Si l'on associe les courbes caractéristiques de telle manière qu'elles aient une enveloppe, on obtient généralement une intégrale avec une arête de rebroussement. Mais j'ai obtenu aussi une classe nouvelle et remarquable d'intégrales, en associant les caractéristiques de telle manière qu'elles aient un contact du second ordre avec leur enveloppe. Ces intégrales se distinguent des autres en ce qu'elles n'ont plus de rebroussement apparent. Par exemple, si les intégrales complètes sont des sphères, il y aura des intégrales pour lesquelles les sphères inscrites seront osculatrices à une courbe, tandis que, pour les autres intégrales, les sphères inscrites ont seulement trois points communs confondus avec l'arête de rebroussement.

Un autre point nouveau de cette première partie consiste dans l'extension à toutes les caractéristiques des propriétés des tangentes conjuguées d'une surface. Un des caractères déjà signalés de l'intégrale singulière consiste en ce qu'il passe en chacun de ses points et dans la direction de chacune de ses tangentes une caractéristique. Cela posé, soient, en un point M de l'intégrale singulière, Mt, Mt' deux tangentes jouissant de cette propriété que, si l'on associe les intégrales complètes tangentes à l'intégrale singulière aux points d'une courbe ayant en M la direction de la droite Mt, la caractéristique située sur leur enveloppe et passant en M ait pour tangente Mt'. Cette propriété sera réciproque, elle subsistera quand on échangera Mt, Mt'. Si en particulier on prend comme intégrales complètes les plans tangents à une surface non développable, les caractéristiques sont les tangentes à cette surface, et l'on retrouve la propriété des tangentes conjuguées comme conséquence d'une propriété générale de l'intégrale singulière, par rapport aux caractéristiques.

J'étudie aussi les questions relatives à l'ordre du contact des intégrales générales et complètes avec l'intégrale singulière. Si les intégrales complètes touchent en un nombre limité de points l'in-

tégrale singulière, et qu'en ces points il n'y ait pas osculation, c'est-à-dire si la courbe d'intersection des deux surfaces n'a pas un rebroussement au point de contact, ce qui est le cas ordinaire, aucune intégrale générale n'aura un contact du deuxième ordre avec l'intégrale singulière. Au contraire, si les intégrales complètes sont osculatrices à l'intégrale singulière, toutes les intégrales générales auront avec l'intégrale singulière un contact du deuxième ordre. Un exemple remarquable est offert par la considération des sphères osculatrices à une surface quelconque.

Un article spécial traite des intégrales singulières des équations linéaires ou plutôt des équations qui se décomposent en plusieurs équations linéaires.

La deuxième partie traite encore des équations aux dérivées partielles formées par l'élimination des constantes, mais en supposant quelconque le nombre des variables indépendantes. Je commence par la définition de l'intégrale singulière. A cet effet, je reprends, en la généralisant d'après M. Lie, la notion de l'intégrale complète due à Lagrange. Ce point de départ paraît conduire, on le sait, à plusieurs classes de solutions, suivant le nombre de relations qu'on établit entre les constantes arbitraires. Pour montrer que cette division est artificielle et tient au choix de l'intégrale complète, j'étudie la question difficile du passage d'une intégrale complète à toute autre. La conclusion de cette étude est la suivante : la théorie de l'intégrale singulière ne peut être faite d'une manière simple avec une intégrale complète quelconque. *Une seule intégrale,* celle d'où l'on était parti, permet d'exposer cette théorie avec netteté.

Pour rendre compte de la nature de ce fait, il me suffira d'indiquer ce qu'il devient dans le cas de deux variables indépendantes. Imaginons que l'on considère un premier groupe d'intégrales complètes, touchant leur enveloppe chacune en un nombre limité de points. Toutes les autres intégrales complètes toucheront nécessairement la solution singulière, chacune en tous les points d'une courbe. Ainsi leurs relations avec l'intégrale singulière sont

tout à fait différentes de celles des intégrales primitivement choisies. Une des conséquences consiste en ce que, si l'on associe ces nouvelles intégrales complètes de manière que leur enveloppe donne une intégrale générale, cette intégrale générale comprendra toujours en facteur dans son équation la solution singulière. Prenons, par exemple, comme intégrales complètes, les plans tangents à une surface (Σ) non développable. Si nous remplaçons ces premières intégrales complètes par les cônes circonscrits à (Σ) ayant, par exemple, leurs sommets dans un plan (P), toute intégrale pourra s'obtenir en prenant l'enveloppe d'une suite de ces cônes, de ceux qui ont leurs sommets sur une courbe quelconque du plan (P). Mais cette enveloppe comprendra toujours évidemment la surface (Σ) comme solution étrangère.

Il m'a paru inutile de faire une théorie rationnelle de l'intégrale singulière avec de telles intégrales complètes. Me bornant donc à signaler ce fait si important, j'ai obtenu une proposition précise applicable à tous les cas et permettant de déduire la solution singulière de l'équation aux dérivées partielles. Voici quelle est cette proposition :

Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$F(z, x_1, \cdots x_n, p_1, p_2 \cdots p_n) = 0,$$

dont j'écris la différentielle totale sous la forme

$$Z dz + X_1 dx_1 + \cdots + P_1 dp_1 + \cdots = 0,$$

la solution singulière doit satisfaire, quand elle existe, aux $2n$ équations

$$X_i + Z p_i = 0, \qquad P_k = 0, \qquad i, k = 1, 2, 3, \cdots n;$$

en d'autres termes, pour chacun de ses éléments, les équations différentielles de la caractéristique doivent être complètement indéterminées.

La théorie de l'élimination des constantes paraît donc conduire d'une manière normale à une solution singulière satisfaisant aux

équations précédentes. Or il est très facile de reconnaître directement que, pour une équation aux dérivées partielles quelconque, les équations précédentes ne peuvent conduire à une solution. L'explication de cette contradiction est la même que pour les équations différentielles ordinaires.

En généralisant une proposition déjà établie dans la théorie des équations différentielles ordinaires, je suis même arrivé à un résultat qui paraîtra plus singulier. Dans le cas des équations aux dérivées partielles formées par l'élimination des constantes, les $2n+1$ équations

$$F=0, \qquad X_i+Zp_i=0, \qquad P_k=0,$$

admettent, en dehors de la solution singulière, une autre solution commune, dans laquelle elles équivaudraient à deux relations seulement entre les $2n+1$ variables

$$z, x_1, \cdots x_n, p_1, \cdots p_n.$$

Quoi qu'il en soit, la solution singulière, quand elle existe, devant satisfaire aux $2n+1$ équations déjà indiquées

$$F=0, \qquad P_i=0, \qquad X_i+Zp_i=0,$$

je prends cette propriété comme définition de l'intégrale singulière, et j'indique comment on reconnaîtra s'il y a des intégrales singulières et comment on les trouvera quand elles existent.

Dans l'exposition des résultats de cette partie, j'ai employé un lemme dû à MM. Lie et Mayer et employé par eux pour un autre objet. La facilité avec laquelle la théorie des équations aux dérivées partielles se déduit de ce lemme et s'y rattache montre bien qu'il ne constitue qu'un changement de forme. Mais ce changement est très intéressant et m'a paru mériter à tous les égards d'être adopté.

Après avoir donné une définition précise des intégrales singulières, définition s'appuyant uniquement sur l'équation aux dé-

rivées partielles, il importait d'étudier par une méthode rigoureuse les relations de ces intégrales avec toutes les autres, en un mot, d'intégrer complètement l'équation aux dérivées partielles dans le voisinage de la solution singulière considérée. C'est à cette étude essentielle qu'est employée la troisième partie de mon travail, où je reprends l'examen de la méthode de Cauchy pour l'intégration des équations aux dérivées partielles par l'emploi des séries. Je résous d'abord cette question en employant les caractéristiques et en discutant le système d'équations aux dérivées ordinaires qui les définit. Je montre que, si l'équation proposée

$$F = 0,$$

admet une solution singulière pour laquelle $\frac{\partial F}{\partial z}$ soit différent de zéro, il y aura une infinité de caractéristiques tangentes en chaque point à la solution singulière, retrouvant ainsi une des propriétés des équations formées par l'élimination des constantes.

Dans le cas où il n'y a pas de solution singulière, l'équation en x, y, z que l'on obtiendrait, par exemple, dans le cas de deux variables indépendantes en éliminant p, q entre les trois équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0,$$

est le lieu des points de rebroussement des caractéristiques.

J'examine le cas où l'on assujettirait l'intégrale à passer par une courbe tracée sur l'intégrale singulière. Dans ce cas remarquable, la méthode de Cauchy ne suffirait pas à indiquer comment on doit associer les caractéristiques pour obtenir une intégrale, et une objection faite par M. Bertrand à cette méthode acquiert ici toute sa valeur et ne peut être levée que par des recherches spéciales. L'intégrale considérée par Cauchy est réellement infinie pour chaque caractéristique.

Une autre méthode d'intégration où l'on n'emploie plus les caractéristiques, et qui, par conséquent, s'applique à tous les ordres, est ensuite étudiée. Je cherche les intégrales qui peuvent être

tangentes à l'intégrale singulière, en essayant d'apporter la plus grande rigueur dans cet examen, qui est fondamental pour l'étude qui nous occupe. Voici quels sont les résultats obtenus.

Considérons d'abord les équations aux dérivées partielles pour lesquelles l'équation $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ n'est pas vérifiée par tous les éléments de la solution singulière. J'obtiens le résultat remarquable qui suit. Soit

$$z = f(x_1 \cdots x_n)$$

l'équation de la solution singulière.

Il y a n classes de solutions développables en série et, si je puis m'exprimer ainsi, tangentes à la solution singulière. Ces classes sont représentées par des équations des formes suivantes :

$$z = f(x_1, \cdots x_n) + u_1^2$$

$$z = f(x_1, \cdots x_n) + u_1^2 + u_2^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$z = f(x_1, \cdots x_n) + u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

où $u_1 \ldots u_n$ désignent des séries convergentes. Les premières, tangentes en tous les points d'un lieu défini par une seule équation

$$u_1 = 0$$

contiennent les coefficients d'une fonction arbitraire de $n-1$ variables. Celles de la k^e classe contiennent les coefficients de k fonctions arbitraires de $n-k$ variables. La dernière dépend de n constantes. C'est elle qui joue le rôle de l'intégrale complète.

Quelques-unes de ces classes disparaissent, en tant que solutions développables, dans des cas déterminés. Prenons, par exemple, le cas de deux variables indépendantes, et soit

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

l'équation aux dérivées partielles. En général, il y a deux classes de solutions, les unes représentées par l'équation

$$z = f(x, y) + u^2,$$

qui jouent le rôle des intégrales générales de Lagrange, les autres définies par l'équation

$$z = f(x, y) + v^2 + w^2,$$

tangentes en un seul point à la solution singulière et tenant lieu de l'intégrale complète.

Cette dernière classe disparaît, si la forme

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} dp^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial p \partial q} dp\, dq + \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} dq^2$$

est un carré parfait. Les deux classes disparaissent si cette forme est nulle; ou plutôt elles ne disparaissent qu'en tant que solutions développables; les surfaces qu'elles représentent continuent à exister, mais acquièrent des points singuliers à la place du point de contact.

Je dis aussi quelques mots du cas où $\frac{\partial F}{\partial z}$ serait nul en tous les points de la solution singulière. Alors, si l'on trace une courbe quelconque sur cette solution, on ne pourra pas, en général, trouver d'intégrale tangente à la solution singulière en tous les points de cette courbe, à moins que cette courbe n'ait été convenablement choisie.

Par contre, il y a des solutions singulières pour lesquelles on trouve toujours deux intégrales développables d'espèce tout à fait différente, tangentes en tous les points de la même courbe à l'intégrale singulière. Je crois que c'est dans cette partie de mon travail que sont, je ne dirai pas complètement résolues, mais abordées les véritables difficultés de cette étude, et que toute la théorie des solutions singulières se résume dans la solution de telles questions : Après avoir reconnu l'existence de cette solution, telle que

nous l'avons définie, examiner les rapports de contact qu'elle peut avoir avec les autres intégrales.

Je citerai ici la confirmation d'une remarque des plus curieuses de Poisson. Dans la plupart des cas on peut mettre, par une substitution convenable, la solution singulière en facteur et l'éliminer de l'équation aux dérivées partielles.

La quatrième et dernière partie contient la généralisation d'une belle théorie de Lagrange et de M. Serret sur les solutions singulières des équations différentielles ordinaires. Je fais connaître une classe d'équations aux dérivées partielles, qu'on intègre en les différentiant et dont le type le plus simple est la suivante :

$$z - p_1 x_1 - \ldots - p_n x_n = f(p_1, \ldots p_n),$$

généralisation de celle de Clairault. Je montre que cette généralisation a des rapports étroits avec la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre, et qu'elle donne notamment la solution des deux questions suivantes :

1° Trouver toutes les équations du second ordre pour lesquelles les équations différentielles de la caractéristique admettent une intégration complète;

2° Former les équations du second ordre ayant deux intégrales premières du premier ordre.

La théorie précédente est équivalente à celle du contact du premier ordre. Pour la généraliser, j'étudie les questions relatives au contact de deux surfaces. Cette théorie présente des difficultés particulières, parce qu'on n'a pas toujours le nombre de paramètres nécessaire pour assurer un contact d'un ordre déterminé, et l'on en a trop pour établir le contact d'ordre immédiatement inférieur. J'essaye de lever ces difficultés, mais la théorie du contact ne m'a conduit à des équations intégrables par différentiation que dans le cas des surfaces à quatre et à cinq paramètres. Les autres cas paraissent ne pas se prêter à la formation de telles équations aux dérivées partielles.

Dans ce travail, j'ai fait abstraction de toutes les difficultés te-

nant au choix des axes ou aux valeurs infinies des dérivées de z. On sait que, par un changement d'axes ou par une substitution linéaire, on peut toujours les éviter. J'indique, en terminant, comment on pourrait développer la théorie en employant des coordonnées homogènes, ce qui ne laisserait plus de place à des difficultés de ce genre.

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DE LA MÉTHODE DES ENVELOPPES DE MONGE.

§ 1er. DE LA FORMATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES PAR L'ÉLIMINATION DES CONSTANTES.

Soit

$$V(x, y, z, a, b) = 0 \tag{1}$$

l'équation en coordonnées cartésiennes d'une surface, contenant deux paramètres arbitraires, a et b. Si l'on désigne, suivant l'usage, par p et q les dérivées de z considérée comme fonction de x et de y, on aura

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Entre les équations (1) et (2) éliminons a et b, nous obtiendrons une certaine relation

$$F(x, y, z, p, q) = 0, \tag{3}$$

qui constitue une équation aux dérivées partielles du premier ordre, à laquelle satisfont toutes les surfaces représentées par l'équation (1).

On a l'habitude de dire que l'équation aux dérivées partielles exprime une propriété du plan tangent à toute surface satisfaisant à cette équation. En effet, si x, y, z désignent les coordonnées d'un point déterminé M de cette surface, et X, Y, Z, les coordonnées courantes, le plan tangent au point M aura pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \tag{4}$$

et comme p et q doivent satisfaire à l'équation (3), on voit que le plan tangent à toutes les surfaces qui passent au point M et qui

satisfont à l'équation différentielle ne peut être arbitrairement choisi; il devra être tangent au cône qu'on obtient en éliminant p, q entre les équations (3), (4) et la suivante :

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial q}}. \tag{5}$$

On peut encore raisonner de la manière suivante : les équations de la normale au point (x, y, z) sont les suivantes :

$$\begin{cases} X-x+p(Z-z)=0, \\ Y-y+q(Z-z)=0. \end{cases} \tag{6}$$

En tirant de ces équations les valeurs de p et de q et les portant dans l'équation (3), on aura

$$F\left(x, y, z, -\frac{X-x}{Z-z}, -\frac{Y-y}{Z-z}\right)=0. \tag{7}$$

Cette équation représente un cône, lieu des normales à toutes les surfaces satisfaisant à l'équation (3) et passant au point (x, y, z).

Ainsi l'on peut dire que l'équation aux dérivées partielles exprime l'une des propriétés suivantes :

Les surfaces satisfaisant à l'équation et passant en un point déterminé doivent avoir leur normale sur un certain cône, que nous appellerons cône des normales, en le désignant par la lettre (N).

Ou, ce qui revient au même :

Les surfaces satisfaisant à l'équation et passant en un point sont telles que leur plan tangent doit envelopper un autre cône, supplémentaire du cône (N), et que nous désignerons sous le nom de cône (T).

Ces remarques ont été faites depuis longtemps; on peut les compléter de la manière suivante :

Cherchons celles des surfaces satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles (3) qui peuvent être tangentes à un plan.

Soit

$$Z=\alpha X+\beta Y+\gamma \tag{8}$$

l'équation de ce plan. On devra avoir, pour le point de contact,

$$\alpha = p, \qquad \beta = q,$$

et, par conséquent, les coordonnées de ce point devront satisfaire à l'équation

$$F(X, Y, Z, \alpha, \beta) = 0, \tag{9}$$

qu'on obtient, en substituant dans l'équation aux dérivées partielles α à p, β à q.

L'équation (9), jointe à l'équation (8), définit une courbe (C), sur laquelle doivent se trouver les points de contact des surfaces cherchées. Ainsi, au lieu de dire que l'équation différentielle fait connaître une propriété du plan tangent, on peut aussi remarquer qu'elle exprime une propriété du point de contact, en ce sens que les surfaces tangentes à un plan et satisfaisant à l'équation devront avoir leurs points de départ sur une certaine courbe (C) de ce plan, que l'équation différentielle permet de déterminer. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on considère les surfaces satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles comme lieux de points, cette équation définit les surfaces cherchées par une propriété du plan tangent que l'on peut énoncer ainsi :

Pour chaque surface passant par un point de l'espace, la normale doit se trouver sur un cône (N) *correspondant à ce point, ou le plan tangent doit toucher un cône* (T) *supplémentaire du cône* (N).

Mais si l'on considère la surface comme enveloppe de ses plans tangents, l'équation indique une propriété du point de contact, c'est-à-dire que toutes les surfaces tangentes à un plan doivent avoir leurs points de contact sur une certaine courbe (C) *de ce plan.*

La symétrie, ainsi introduite dans l'étude de la question qui nous occupe, nous sera très utile; dès à présent, elle donne la raison de certains faits analytiques; elle explique, en particulier, le succès de la transformation de Legendre, dans laquelle on

substitue aux trois variables x, y, z, les trois suivantes, p, q et $u = px + qy - z$.

Il est facile, en effet, de reconnaître que les deux caractères que nous avons mis sur la même ligne se transforment l'un dans l'autre, quand on soumet les surfaces satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles à une transformation par polaires réciproques. Prenons, par exemple, le premier, d'après lequel les surfaces qui passent en un point doivent y être tangentes à un certain cône (T). Aux surfaces passant en ce point correspondront des surfaces tangentes à un plan; au cône (T) correspondra une certaine courbe (C′) de ce plan; et, par suite, la proposition précédente nous montre que les surfaces transformées satisferont, elles aussi, à une équation du premier ordre.

D'après cela, considérons le plan tangent à l'une des surfaces

$$Z = pX + qY - u,$$

où l'on a

$$u = px + qy - z.$$

Il est facile de voir que p, q, u sont les coordonnées ordinaires du pôle de ce plan tangent par rapport à la surface

$$2zZ = X^2 + Y^2,$$

et l'on voit, par conséquent, que u considérée comme fonction de p et de q devra satisfaire à une équation aux dérivées partielles du premier ordre. En prenant une surface quelconque du second degré, on aurait des transformations plus générales, indiquées pour la première fois par M. Chasles, dans l'*Aperçu historique*.

L'équation (1) a été nommée par Lagrange intégrale complète de l'équation aux dérivées particlles (3), et l'illustre géomètre a montré que la connaissance d'une intégrale de cette espèce suffit pour l'intégration complète de l'équation aux dérivées partielles.

En effet, l'équation (3), étant le résultat de l'élimination de a et de b entre les équations (1) et (2), peut évidemment être remplacée par le système des équations (1) et (2), pourvu qu'on y

regarde a et b non plus comme des constantes, mais comme des fonctions quelconques de x et de y. D'après cela, si l'on différentie l'équation (1) en y tenant compte des équations (2), on aura

$$\frac{\partial V}{\partial a}\,da+\frac{\partial V}{\partial b}\,db=0. \tag{10}$$

Cette équation ne peut être vérifiée que de trois manières différentes :

1° En laissant a et b constants. C'est la solution d'où l'on est parti.

2° En supposant

$$\frac{\partial V}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial b}=0. \tag{11}$$

La solution correspondante s'obtiendra en éliminant a et b entre ces deux équations et l'équation (1). C'est le lieu des intersections successives des surfaces correspondantes aux différentes valeurs de a et de b.

3° En établissant entre a et b une relation

$$\varphi(a,b)=0,$$

que nous écrirons, en laissant de côté le cas où elle se réduirait à $a=c^{te}$,

$$b=\varphi(a);$$

alors la solution correspondante sera donnée par le système

$$\begin{cases} V=0,\\ \dfrac{\partial V}{\partial a}+\dfrac{\partial V}{\partial b}f'(a)=0,\\ b=f(a). \end{cases} \tag{12}$$

Cette dernière solution contient une fonction arbitraire, et Lagrange l'a appelée *intégrale générale*. La précédente, ne contenant ni constante ni fonction arbitraire, a reçu le nom d'*intégrale* ou *solution singulière*. Enfin l'équation (1) donne, nous l'avons dit, une *intégrale complète*.

La solution générale est donc définie de la manière suivante.

Parmi les intégrales complètes on forme d'une manière quelconque une suite simplement infinie de surfaces, en établissant une relation entre a et b. L'enveloppe de toutes ces surfaces constitue une intégrale générale de l'équation proposée. Il semblerait donc qu'il y a trois classes d'intégrales : 1° les intégrales générales; 2° les intégrales complètes; 3° l'intégrale singulière. Il importe donc de remarquer qu'aucune différence essentielle ne sépare les intégrales complètes des intégrales générales.

Imaginons, en effet, que, dans le système (12) la fonction $f(a)$ contienne d'une manière quelconque deux constantes arbitraires a', b', que l'on ait

$$b = f(a, a', b').$$

Le résultat de l'élimination de a entre les équations (12) donnera une nouvelle équation

$$V_1(x, y, z, a', b') = 0,$$

qui jouera le rôle d'intégrale complète par rapport aux constantes a', b'. Une des anciennes intégrales complètes, celle, par exemple, que l'on obtiendrait en faisant $a = a_0$, $b = b_0$, sera maintenant l'intégrale générale qu'on obtiendra en établissant entre a' et b' la relation

$$b_0 = f(a_0, a', b').$$

Il n'en est pas de même de la solution singulière, et les caractères qui distinguent cette solution ne changent pas quand on passe d'une intégrale complète à une autre. Il est clair, en effet, que les intégrales générales touchent la solution singulière en tous les points d'une courbe, et, par conséquent, l'enveloppe de toutes les intégrales complètes qu'on pourra choisir sera toujours la solution singulière. Nous reviendrons, du reste, sur ce point dans la seconde partie de notre travail.

§ 2. DES CARACTÉRISTIQUES.

Nous définirons ainsi les courbes tracées sur toute surface intégrale et qui, en chaque point de la surface, admettent pour tan-

gente la génératrice de contact du plan tangent à la surface et du cône (T) correspondant à ce point. Il est clair que, si deux surfaces intégrales se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre et viennent se confondre, leur ligne d'intersection aura pour limite une caractéristique.

Nous allons d'abord trouver les équations de toutes les caractéristiques.

Soient d'abord les intégrales complètes

$$V = 0.$$

Leur intersection avec une intégrale infiniment voisine a pour équations

$$V = 0, \qquad \frac{dV}{da} + \gamma \frac{dV}{db} = 0. \tag{13}$$

Ces deux équations définissent les caractéristiques qui se trouvent sur les intégrales complètes; il est facile de voir qu'il n'y en a pas d'autre.

Considérons, en effet, la solution générale

$$\begin{cases} V(x, y, z, a, b) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} f'(a) = 0, \\ b = f(a), \end{cases}$$

qu'on peut écrire, en y posant

$$\gamma = f'(a),$$

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \gamma \frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

Ces équations, en y considérant a, b, γ, comme des constantes, représentent une des caractéristiques déjà définies par la formule (13); l'intégrale générale est donc engendrée par ces courbes, et comme il y en a une passant par chaque point de la surface, nous voyons qu'il n'y en a pas d'autre sur chaque intégrale générale.

Donc, étant donnée une intégrale complète, on peut en déduire toutes les caractéristiques par les formules (13).

Ces caractéristiques dépendent, on le voit, de trois constantes. On pourra non seulement les faire passer par un point quelconque de l'espace; mais encore en ce point leurs tangentes prendront toutes les directions des génératrices du cône (T). Nous verrons plus loin la définition des caractéristiques indépendamment de toute surface intégrale. Remarquons seulement qu'en même temps que la caractéristique est donnée par les équations (13)

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \gamma \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

on a

$$(14) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + p \frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

p et q étant les coefficients angulaires du plan tangent à la surface intégrale ou au cône (T) en chaque point de la caractéristique.

§ 3. DES DÉVELOPPABLES CARACTÉRISTIQUES.

Nous appellerons ainsi les développables circonscrites à chaque surface suivant une caractéristique. D'après les formules (14) et d'après la définition des caractéristiques, toutes les surfaces qui contiennent une caractéristique sont évidemment tangentes en tous les points de cette courbe. La développable correspondante à chaque caractéristique est donc unique. C'est la limite de la développable circonscrite à une des surfaces intégrales et à toute surface infiniment voisine. Il suit de là que la caractéristique jointe à cette développable constitue un système qui se transforme dans le système semblable, quand on soumet les surfaces intégrales à une transformation par polaires réciproques. De là aussi résulte un moyen de former les équations de toute développable caractéristique. Écrivons l'équation tangentielle de l'intégrale complète

$$W(p, q, u, a, b) = 0,$$

u ayant la signification déjà donnée et la valeur $u = px + qy - z$.

On aura pour la caractéristique développable les équations

$$(15)\qquad \begin{cases} W = 0, \\ \dfrac{\partial W}{\partial a} + \gamma \dfrac{\partial W}{\partial b} = 0, \end{cases}$$

$$(16)\qquad \frac{\partial W}{\partial p} + x\frac{\partial W}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial W}{\partial q} + y\frac{\partial W}{\partial u} = 0,$$

tout à fait pareilles au système (13) et (14).

De même que toutes les caractéristiques passant en un point ont pour tangentes les génératrices du cône (T) de ce point, de même les caractéristiques développables tangentes à un plan ont pour génératrices rectilignes de contact les tangentes de la courbe (C) de ce plan. En effet, soient deux surfaces intégrales tangentes à ce plan en deux points m, m'. Les points m, m' sont sur la courbe (C), et la droite mm' est une génératrice de la développable circonscrite aux deux surfaces. Cela posé, si l'une des surfaces se rapproche de l'autre, le point m' se rapproche de m et la droite mm' vient se confondre avec la tangente en m à la courbe (C).

Donc

Les caractéristiques développables tangentes à un plan ont pour génératrices rectilignes situées dans ce plan les différentes tangentes de la courbe (C) *de ce plan.*

§ 4. DE LA DÉFINITION DES CARACTÉRISTIQUES INDÉPENDAMMENT DE TOUTE SURFACE INTÉGRALE.

Nous avons vu que les courbes caractéristiques passant en un point y ont pour tangentes les génératrices rectilignes du cône (T).

Si donc

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{X-x}{Z-z}, \frac{Y-y}{Z-z}\right) = 0$$

est l'équation de ce cône, les génératrices satisferont à l'équation différentielle

$$(17)\qquad \varphi\left(x, y, z, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0.$$

Mais elles ne sont pas, évidemment, les courbes les plus générales satisfaisant à cette équation. Il est clair, en effet, que l'équation précédente doit admettre une solution avec une fonction arbitraire. Il suffit d'y poser

$$x = f(z), \qquad \frac{dx}{dz} = f'(z),$$

et l'on aura à intégrer une équation différentielle ordinaire à deux variables y et z, qui donnera des solutions, la fonction $f(z)$ étant arbitrairement choisie.

Quelle est donc la propriété qui distingue les caractéristiques de toutes les autres courbes que nous appellerons *courbes intégrales,* satisfaisant à la même équation?

Pour répondre à cette question, nous commencerons par rappeler ce que nous avons dit des cônes (T) et des courbes (C), et par montrer comment on peut établir entre les courbes et les cônes une liaison géométrique indépendante de toute intégrale.

Considérons un plan (P) et la courbe (C) de ce plan. Il est clair, d'après la définition de la courbe (C), que le cône (T) correspondant à un point de cette courbe devra être tangent au plan (P). Ainsi la courbe (C) est le lieu des points pour lesquels les cônes (T) sont tangents au plan (P).

De même, le cône (T) correspondant à un point M est l'enveloppe des plans pour lesquels les courbes (C) passent en M. On voit donc que l'on pourra toujours déduire les courbes (C) des cônes (T) et réciproquement, en faisant usage des propriétés géométriques qui précèdent.

Cela posé, nous avons vu que, si l'on se déplace sur une caractéristique, le plan tangent enveloppe une développable dont les génératrices sont les tangentes aux courbes (C). Ainsi

Les courbes caractéristiques se distinguent de toutes les autres courbes intégrales de l'équation (17) *par la propriété suivante : Menons en chaque point* M *de la caractéristique le plan tangent* (P) *au cône* (T) *de ce point, ayant pour génératrice de contact la tangente à la carac-*

téristique. Quand on se déplace sur la courbe, ce plan enveloppe une surface développable dont la génératrice rectiligne passant en M *est précisément la tangente en* M *à la courbe* (C) *du plan* (P).

On voit que, sans faire appel à aucune propriété des surfaces et en nous servant seulement de la remarque faite au début sur le double point de vue sous lequel on peut considérer l'équation aux dérivées partielles, nous obtenons une propriété des caractéristiques qui va nous permettre de former leurs équations différentielles. Soit, en effet,

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

l'équation proposée. On aura d'abord

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz + \frac{\partial F}{\partial p}dp + \frac{\partial F}{\partial q}dq = 0, \tag{18}$$

$$dz = pdx + qdy. \tag{19}$$

Le plan tangent suivant la tangente à la caractéristique au cône (T) a pour équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \tag{20}$$

et, d'après la théorie des enveloppes, sa génératrice de contact avec le cône (T) s'obtiendra en ajoutant à l'équation précédente la suivante

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial q}},$$

qu'on peut écrire en remplaçant $X - x$, $Y - y$ par les quantités proportionnelles dx, dy

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}}; \tag{21}$$

mais les équations (19), (21), conviennent à toutes les courbes intégrales.

Exprimons la propriété énoncée dans le théorème précédent, et cherchons d'abord la tangente à la courbe (C). Cette courbe passe

au sommet du cône, elle est dans le plan tangent. Elle est donc définie par l'équation (20)

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

jointe à la suivante

$$F(X, Y, Z, p, q) = 0,$$

où p et q sont des constantes, et X, Y, Z les coordonnées d'un point variable de cette courbe; sa tangente au point (x, y, z) sera donc définie par les deux équations

$$(22) \qquad \begin{cases} \delta z = p\,\delta x + q\,\delta y, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial F}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial F}{\partial z}\delta z = 0, \end{cases}$$

qui donnent

$$(23) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)\delta y = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que, lorsque le plan tangent (20) se déplace en roulant sur la caractéristique, son intersection avec sa position initiale coïncide avec la tangente à la courbe (C) définie par les équations (22) ou (23). Pour avoir cette intersection, différentions l'équation du plan (20), nous trouverons

$$-dz = dp(X - x) + dq(Y - y) - p\,dx - q\,dy,$$

ou

$$dp(X - x) + dq(Y - y) = 0.$$

Il faudra donc que l'on ait

$$(24) \qquad dp\,\delta x + dq\,\delta y = 0,$$

ou, en déduisant la valeur de $\frac{\delta y}{\delta x}$ de l'équation (23),

$$(25) \qquad \frac{dp}{\dfrac{\partial F}{\partial x} + p\dfrac{\partial F}{\partial z}} = \frac{dq}{\dfrac{\partial F}{\partial y} + q\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

Cette équation achève de définir la caractéristique. En joignant

aux formules (19), (21), (25), la différentielle totale (18), on obtient le système suivant :

$$(26)\qquad \frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} = \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{dz}{p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q}} = \frac{-dp}{\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-dq}{\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}},$$

qui suffit à définir les variations de y, z, p, q.

Le théorème précédent permet, on le voit, de définir complètement les propriétés qui séparent les caractéristiques de toutes les autres courbes intégrales. Il y a bien d'autres manières d'établir les équations différentielles de la caractéristique. Nous allons en donner une autre, en partant de l'intégrale complète; l'article 24 en contiendra une où l'on prend comme point de départ l'équation aux dérivées partielles. Celle que nous avons fait connaître ici nous a paru curieuse, en ce sens qu'*elle n'emploie aucune propriété des tangentes conjuguées ou de la théorie des surfaces.*

§ 5. D'UNE AUTRE MANIÈRE D'OBTENIR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DES COURBES CARACTÉRISTIQUES.

Il m'a paru qu'il y aurait quelque intérêt à retrouver les équations différentielles des caractéristiques en partant de leurs équations finies :

$$(27)\qquad V = 0, \quad V_1 = \frac{\partial V}{\partial a} + b'\frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

où a, b, b' sont des constantes arbitraires.

A cet effet, nous ferons remarquer que l'équation aux dérivées partielles proposée étant le résultat de l'élimination de a et de b entre les trois équations

$$V = 0, \qquad U = \frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad U' = \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

on aura

$$dF = \lambda\, dV + \mu\, dU + \nu\, dU',$$

λ, μ, ν étant choisis de telle manière que les multiplicateurs de da, db, soient nuls, ce qui donne

$$(28)\qquad \lambda\frac{\partial V}{\partial a}+\mu\frac{\partial U}{\partial a}+\nu\frac{\partial U'}{\partial a}=0,\qquad \lambda\frac{\partial V}{\partial b}+\mu\frac{\partial U}{\partial b}+\nu\frac{\partial U'}{\partial b}=0.$$

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial p}=\mu\dfrac{\partial V}{\partial z},\ \dfrac{\partial F}{\partial x}=\lambda\dfrac{\partial V}{\partial x}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+p\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}\right)+\nu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+q\dfrac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial F}{\partial q}=\nu\dfrac{\partial V}{\partial z},\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\lambda\dfrac{\partial V}{\partial y}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+p\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right)+\nu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+q\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right), \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial F}{\partial z}=\lambda\dfrac{\partial V}{\partial z}+\mu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}+p\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)+\nu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+q\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right), \end{cases}$$

et par suite

$$(30)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}+p\dfrac{\partial F}{\partial z}=\mu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+2p\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}+p^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) \\ \qquad\qquad +\nu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+q\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}+p\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+pq\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right), \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}+q\dfrac{\partial F}{\partial z}=\mu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+p\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+q\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial z}+pq\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) \\ \qquad\qquad +\nu\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+2q\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}+q^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right). \end{cases}$$

Revenons aux équations de la caractéristique. En vertu de la seconde des équations (27), les équations (28) ajoutées après multiplication de la seconde par b' donneront

$$(31)\qquad \mu\left(\frac{\partial U}{\partial a}+b'\frac{\partial U}{\partial b}\right)+\nu\left(\frac{\partial U'}{\partial a}+b'\frac{\partial U'}{\partial b}\right)=0,$$

ou

$$\mu\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}+p\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)+\nu\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}+q\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)=0.$$

Cette équation, comparée à celle qu'on obtient en différentiant la seconde des équations (27) de la caractéristique, nous donne

$$\frac{dx}{\mu}=\frac{dy}{\nu},$$

ou, h désignant une variable auxiliaire,

$$\mu=h\,dx,$$

$$\nu=h\,dy.$$

En portant ces valeurs dans les formules (30), on trouve

$$\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}=h\left[d\left(\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}\right)-\frac{\partial V}{\partial z}dp\right],$$

ou

$$\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}=-h\frac{\partial V}{\partial z}dp, \tag{32}$$

et de même

$$\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}=-h\frac{\partial V}{\partial z}dq. \tag{32}$$

μ et ν étant, en vertu des équations (29), proportionnels à $\frac{\partial F}{\partial p}$, $\frac{\partial F}{\partial q}$, on a

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}},$$

et, en vertu des équations (32),

$$\frac{dp}{\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Ces deux relations suffisent, jointes aux deux suivantes, qui sont évidentes

$$dF=0, \qquad dz=p\,dx+q\,dy,$$

et l'on retrouve ainsi les équations différentielles de la caractéristique, telles qu'elles sont données par les formules (26).

§ 6. DÉTERMINATION DES INTÉGRALES SATISFAISANT À DES CONDITIONS DIVERSES.

De tout ce qui précède il résulte une propriété essentielle des caractéristiques : si deux surfaces sont tangentes en un point (M), elles le seront en tous les points d'une caractéristique. Considérons, en effet, une surface passant en M et y étant tangente à un certain plan tangent (P) du cône (T) de ce point. Il est clair, d'après la définition des caractéristiques, qu'elle contiendra tout entière celle de ces courbes passant au point M et qui y admet pour tangente la génératrice de contact du plan (P) et du cône (T). En

outre, en tous les points de cette caractéristique, elle sera tangente à la développable caractéristique contenant cette courbe. Il suffit donc que deux surfaces intégrales aient en un point le même plan tangent pour qu'elles soient tangentes en tous les points d'une caractéristique.

Ainsi, pour qu'une surface intégrale contienne une caractéristique, il suffit qu'elle passe en un point de cette caractéristique et ait pour plan tangent en ce point le plan tangent au cône (T), suivant la direction de cette caractéristique. C'est ce qu'on peut aussi établir par le calcul suivant. Soient

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + b' \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

les équations d'une caractéristique, et

$$(33) \quad \beta = f(\alpha), \qquad V(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta} f'(\alpha) = 0,$$

celles qui définissent une intégrale. Pour qu'elle contienne la caractéristique précédente, il suffit que les deux équations

$$b = f(a), \qquad b' = f'(a)$$

soient satisfaites. Donc une surface intégrale pourra contenir autant de caractéristiques qu'on le voudra et renfermer encore une fonction arbitraire.

Si deux intégrales correspondantes à deux fonctions $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$, contiennent en commun m caractéristiques, les fonctions $f(\alpha)$, $\varphi(\alpha)$ et leurs dérivées seront égales pour m valeurs de α; nous dirons qu'elles ont en commun m caractéristiques infiniment voisines quand les deux fonctions et leurs dérivées jusqu'à l'ordre m seront égales pour une valeur déterminée a de α. Je dis que les deux surfaces auront alors en tous les points de cette caractéristique un contact d'ordre m. En effet, il suffit de jeter les yeux sur les équations d'une intégrale générale

$$V(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta} f'(\alpha) = 0, \qquad \beta = f(\alpha),$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial V}{x}+p\frac{\partial V}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial y}+q\frac{\partial V}{\partial z}=0,$$

pour reconnaître qu'en calculant les dérivées de z par rapport à x et à y jusqu'à l'ordre m, on introduira seulement les m premières dérivées de $f(\alpha)$. Si donc ces m premières dérivées sont les mêmes pour deux fonctions, il y aura contact d'ordre m pour les deux surfaces correspondantes en tous les points d'une caractéristique commune.

Voilà donc une propriété essentielle des caractéristiques :

Si deux surfaces intégrales passent en un point et y ont un contact d'ordre m, ce contact se maintiendra en tous les points d'une caractéristique passant en ce point et y admettant le même plan tangent que les deux surfaces.

Il était d'ailleurs évident, *a priori*, comme le montre le calcul précédent, qu'il suffit de m conditions pour assurer un contact d'ordre m entre deux intégrales en un point. Car la différentiation de l'équation aux dérivées partielles donne déjà entre les dérivées d'ordre supérieur des relations dont il faut tenir compte.

Proposons-nous maintenant de rechercher les surfaces intégrales satisfaisant à certaines conditions. Par exemple, cherchons d'abord celles qui passent par une courbe donnée.

Si cette courbe se trouve sur l'intégrale singulière, nous avons une première solution, l'intégrale singulière. Dans tous les autres cas, il faut chercher une solution seulement parmi les intégrales complètes ou générales.

Supposons que la courbe ne soit sur aucune des intégrales complètes (et, dans ce cas, elle ne sera jamais une caractéristique); il est clair qu'il suffira de considérer les intégrales complètes tangentes à la courbe, leur enveloppe donnera la seule intégrale générale passant par la courbe.

Supposons que la courbe soit sur une intégrale complète; alors, si elle n'est pas une caractéristique, elle coupera les caractéris-

tiques de cette intégrale complète, et, d'après le théorème donné au commencement de cet article, la surface intégrale qui contient la courbe devra contenir toutes ces caractéristiques et, par conséquent, se confondre avec l'intégrale complète.

Enfin, si la courbe est une caractéristique, nous savons que le problème sera indéterminé.

En résumé, le problème ne sera indéterminé que si la courbe est une caractéristique.

Si la courbe n'est pas une caractéristique et qu'elle ne soit pas placée sur l'intégrale singulière, à la vérité il pourra y avoir plusieurs intégrales passant par cette courbe, mais ces intégrales correspondront aux divers plans tangents qu'on peut mener par les tangentes de la courbe aux cônes (T) de ces points, et se couperont sous un angle fini. Ce seront plutôt des nappes d'une même surface.

Enfin, si la courbe est située sur l'intégrale singulière, elle sera située sur deux intégrales *tangentes en tous les points de la courbe.* C'est là une propriété distinctive de l'intégrale singulière. Ces deux intégrales seront : 1° l'intégrale singulière; 2° l'enveloppe des intégrales complètes passant aux différents points de la courbe et qui y sont tangentes à l'intégrale singulière.

Voici un autre problème dont nous n'étudierons pas en détail la solution : Trouver les surfaces intégrales tangentes à une surface donnée en tous les points d'une courbe. Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface donnée. Cherchons la courbe de contact de cette surface et de la surface intégrale demandée. En ses points on aura

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

En substituant les valeurs de p et de q dans l'équation aux dérivées partielles, on obtiendra une relation entre x, y, z, qui, jointe à la

précédente, déterminera la courbe de contact, et l'on sera ramené au problème précédent.

Une intégrale complète très remarquable permet d'exposer avec élégance la solution des problèmes précédents.

Soit

$$V(x, y, z, a, b) = 0$$

une intégrale complète quelconque. En exprimant qu'elle passe par le point x_0, y_0, z_0, on aura une relation entre a et b, que j'écris

$$b = \psi(a).$$

En cherchant ensuite l'enveloppe de toutes les intégrales complètes pour lesquelles cette relation est satisfaite, on obtient une intégrale

$$V(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = 0, \tag{34}$$

jouissant de propriétés remarquables.

D'abord si l'on y considère x_0 comme un nombre, y_0, z_0 comme des constantes arbitraires, elle peut jouer le rôle d'intégrale complète.

En second lieu, x_0, y_0, z_0 étant considérées comme les coordonnées d'un point quelconque, elle donne le lieu géométrique des caractéristiques passant par ce point. C'est donc la condition pour que les deux points (x, y, z) (x_0, y_0, z_0) soient sur une même caractéristique. Cette propriété nous montre qu'elle est symétrique en x, y, z et x_0, y_0, z_0. Or, si l'on appelle p et q les coefficients angulaires du plan tangent au point x, y, z, on a

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0. \tag{35}$$

En appelant p_0, q_0 les mêmes coefficients angulaires au point x_0, y_0, z_0, on aura donc

$$\frac{\partial V}{\partial x_0} + p_0\frac{\partial V}{\partial z_0} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y_0} + q_0\frac{\partial V}{\partial z_0} = 0. \tag{36}$$

Les intégrales (34) ont évidemment au point x_0, y_0, z_0, un point

multiple dont les tangentes sont les génératrices du cône (T). On pourrait donc les appeler *intégrales à point singulier*.

On pourrait de même former des *intégrales à plan singulier* en prenant l'enveloppe de toutes les intégrales complètes tangentes à un même plan (P). L'intégrale ainsi obtenue sera tangente à ce plan en tous les points de la courbe (C) de ce plan, et elle sera engendrée par toutes les caractéristiques tangentes à ce plan aux différents points de la courbe (C). On la déduirait de la précédente par la méthode des polaires réciproques.

Servons-nous maintenant de la formule (34), par exemple pour trouver les intégrales passant par une courbe donnée. Soient

$$y = \varphi(x), \qquad z = \psi(x)$$

les équations de cette courbe. Il suffira d'effectuer les substitutions

$$y_0 = \varphi(x_0), \qquad z_0 = \psi(x_0),$$

et de chercher l'enveloppe de la surface

$$V(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = 0,$$

lorsque varie x_0.

De même, s'il s'agit de trouver l'intégrale tangente à une surface, on adjoint à l'équation (34) les trois suivantes

$$f(x_0, y_0, z_0) = 0, \qquad \frac{\frac{\partial V}{\partial x_0}}{\frac{\partial f}{\partial x_0}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial y_0}}{\frac{\partial f}{\partial y_0}} = \frac{\frac{\partial V}{\partial z_0}}{\frac{\partial f}{\partial z_0}},$$

et on éliminera x_0, y_0, z_0. Le résultat de l'élimination sera l'équation de la surface cherchée. Pour ne pas faire double emploi, nous n'entrerons pas dans la discussion de ces éliminations.

§ 7. EXAMEN DE QUELQUES EXEMPLES.

Avant de poursuivre cette étude, examinons quelques exemples particuliers, pour y trouver la confirmation des remarques précédentes.

Prenons d'abord comme intégrales complètes tous les plans tangents à une surface non développable (Σ). Les solutions générales seront des surfaces développables circonscrites à (Σ). Pour avoir l'intégrale générale contenant une courbe, il suffira de faire rouler un plan à la fois sur (Σ) et sur cette courbe, et de prendre l'enveloppe de ce plan. Cette enveloppe se composera, en général, de plusieurs nappes se coupant suivant la courbe et qu'on pourra considérer, si l'on veut, comme des solutions distinctes.

Si la courbe (U) que doit contenir l'intégrale est tracée sur (Σ), il y aura deux intégrales distinctes tangentes l'une à l'autre en tous les points de la courbe (U), à savoir (Σ) et la surface développable qui lui est circonscrite suivant la courbe (U).

Les cônes (T) sont ici les cônes circonscrits à la surface (Σ). Les caractéristiques sont les intersections de deux plans tangents infiniment voisins, c'est-à-dire les tangentes de (Σ).

Quant aux courbes (C), il n'y a pas lieu de les considérer ici, puisqu'il n'y a aucune intégrale tangente à un plan quelconque non tangent à (Σ).

En second lieu, prenons comme intégrales complètes des sphères tangentes à un plan (P) et passant par un point A. Les caractéristiques seront des cercles passant par A et tangents à (P). La solution singulière sera le plan (P). Parmi les intégrales générales, nous distinguerons celles qui sont l'enveloppe des sphères passant par un point M. Ces sphères, devant passer à la fois par les deux points A et M et être tangentes au plan (P), envelopperont, comme on sait, une cyclide de Dupin. Par suite, le cône (T) correspondant à un point quelconque M sera un cône de révolution. De même, si nous étudions celles des sphères qui sont tangentes à un plan (Q), elles devront être tangentes à la fois aux deux plans (P) et (Q) et passer par un point A. Elles envelopperont encore une cyclide et elles toucheront le plan (Q) en tous les points d'un cercle. Ainsi les courbes (C) situées dans un plan quelconque (Q) seront des cercles.

On pourrait multiplier les exemples; nous nous attacherons

surtout au premier, car il est très simple et va nous mettre sur la voie de belles propriétés appartenant dans tous les cas aux caractéristiques.

Dans ce premier exemple, où les caractéristiques sont les tangentes à la surface (Σ), nous savons que toute solution générale ou complète est une surface développable. Or, parmi les surfaces formées avec les caractéristiques d'une manière quelconque, on doit distinguer deux classes principales : 1° les surfaces gauches tangentes à (Σ), 2° les surfaces développables. Ces dernières seules sont des intégrales; on sait qu'elles se composent de deux nappes venant se raccorder en tous les points d'une arête de rebroussement. En outre, M. Bouquet a démontré qu'alors la plus courte distance de deux génératrices infiniment voisines est du troisième ordre, tandis qu'elle n'est que du premier ordre pour les surfaces gauches. Ce sont ces propriétés que nous allons étendre aux surfaces formées de caractéristiques.

§ 8. DES COURBES INTÉGRALES; EXTENSION DES PROPRIÉTÉS DES SURFACES DÉVELOPPABLES.

Reprenons l'équation de la solution générale

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \qquad b = f(a), \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b} f'(a) = 0.$$

Nous désignerons par le symbole δ toute différentielle par rapport à a, b étant exprimé en a, et par d toute différentielle prise en laissant a et b constants. Alors l'intégrale générale sera donnée par les équations

$$V = 0, \qquad \delta V = 0. \tag{37}$$

Adjoignons à ces équations la suivante

$$\delta^2 V = 0.$$

Les trois équations

$$V = 0, \qquad \delta V = 0, \qquad \delta^2 V = 0 \tag{38}$$

définiront une courbe que l'on appellera *arête de rebroussement* de

l'intégrale considérée. Cette dénomination, que Monge a empruntée à la théorie des surfaces développables, se justifiera dans la suite.

On peut d'abord démontrer que cette arête de rebroussement est tangente à toutes les caractéristiques situées sur l'intégrale. En effet, si nous différentions les deux premières équations (38) en y considérant a comme fonction de la variable indépendante, nous aurons

$$dV + \delta V = 0, \qquad d\delta V + \delta^2 V = 0,$$

ou, en vertu des mêmes équations (38),

$$dV = 0, \qquad d\delta V = 0.$$

Ces équations définissent les rapports de dx, dy, dz, c'est-à-dire la tangente à l'arête de rebroussement. Or elles sont évidemment les mêmes que celles qu'on obtiendrait en différentiant les équations de la caractéristique

$$V = 0, \qquad \delta V = 0,$$

où a doit être traitée comme une constante. Ainsi l'arête de rebroussement peut être considérée comme une courbe enveloppe de toutes les caractéristiques situées sur l'intégrale.

Elle fait donc partie de ces courbes que nous avons appelées *courbes intégrales*, et qui ont pour unique propriété d'admettre comme tangentes en chaque point les génératrices du cône (T) relatif à ce point.

Je dis que réciproquement toute courbe intégrale (U) peut être obtenue comme arête de rebroussement. Pour le démontrer, je mène en chaque point M de (U) la caractéristique tangente. J'ai une suite de caractéristiques définies par les équations

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + \gamma \frac{\partial V}{\partial b} = 0, \tag{39}$$

où b et γ sont des fonctions de a. En passant d'un point de la courbe (U) au point infiniment voisin, x, y, z, a varient, et l'on a

$$dV + \left(\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{db}{da}\right) da = 0.$$

Mais la tangente à la courbe (U) étant la même que pour la caractéristique (39), on doit avoir

$$dV = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{\partial V}{\partial a} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{db}{da} = 0.$$

Comparons à la seconde des équations (39), nous voyons que γ doit être égal à $\frac{db}{da}$. Ainsi les caractéristiques tangentes à la courbe intégrale sont bien celles qui engendrent une intégrale de l'équation aux dérivées partielles. Soient

$$V = 0, \qquad \delta V = 0$$

les équations de l'une de ces caractéristiques. En se déplaçant sur la courbe (U), on a

$$dV + \delta V = 0, \qquad d\delta V + \delta^2 V = 0.$$

Mais en marchant sur la caractéristique, on a

$$dV = 0, \qquad d\delta V = 0.$$

Les tangentes devant être les mêmes, il faut que l'on ait

$$\delta V = 0, \qquad \delta^2 V = 0.$$

La courbe (U) est donc l'arête de rebroussement de l'une des intégrales, et elle est représentée par les équations

$$V = 0, \qquad \delta V = 0, \qquad \delta^2 V = 0,$$

entre lesquelles il faudra éliminer a.

Nous voyons que, pour obtenir une surface intégrale, il suffit d'associer les caractéristiques de telle manière qu'elles soient tangentes à une courbe. C'est ainsi que, si, revenant à l'exemple de l'article précédent, nous considérons le cas où les caractéristiques sont les tangentes d'une surface, nous voyons que, pour obtenir une intégrale, il faut associer celles de ces droites qui sont les tangentes à une courbe.

La théorie précédente offre un moyen, que Monge n'a pas négligé, d'intégrer une classe remarquable d'équations différentielles, celles qui définissent des courbes par l'unique relation

$$\varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}\right) = 0. \tag{40}$$

Cette relation exprime que les tangentes qui passent en un point y forment les génératrices d'un cône (T). Il suffira d'intégrer l'équation aux dérivées partielles définissant les surfaces dont les plans tangents enveloppent les cônes (T), pour avoir aussi l'intégrale complète de l'équation précédente. Voir le mémoire intitulé *Supplément, où l'on fait voir que les équations aux différences ordinaires pour lesquelles les conditions d'intégrabilité ne sont pas satisfaites sont susceptibles d'une véritable intégration*, etc. [1].

Mais, pour généraliser d'une manière plus complète les propriétés des surfaces développables, il importe que nous rappelions quelques notions sur la génération des surfaces par les courbes, et que nous les précisions un peu.

Soient

$$\begin{cases} f(x, y, z, \alpha) = 0 \\ \varphi(x, y, z, \alpha) = 0 \end{cases} \tag{41}$$

les équations d'une courbe contenant un paramètre variable α. Cette courbe engendre une surface dont on obtiendra l'équation en éliminant α entre les deux équations précédentes. En général, et c'est ce que nous supposerons dans la suite, deux courbes correspondantes à des valeurs différentes de α ne se coupent pas. Même dans ce cas, il y a lieu de distinguer deux espèces bien différentes de surfaces engendrées.

Supposons d'abord que chaque courbe soit rencontrée par la courbe infiniment voisine, ce qui veut dire que le système des quatre équations

$$f = 0, \quad \varphi = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0, \tag{42}$$

[1] *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1784, p. 502.

est vérifié pour toute valeur de α, que l'élimination de α entre ces quatre équations conduit, non pas à un nombre limité de points, mais aux deux équations d'une courbe (R). Il est facile de voir que la courbe (R) sera tangente à toutes les génératrices (41). En effet, la tangente à l'une de ces génératrices, au point où elle rencontre la courbe (R), sera définie par les deux équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz=0.$$

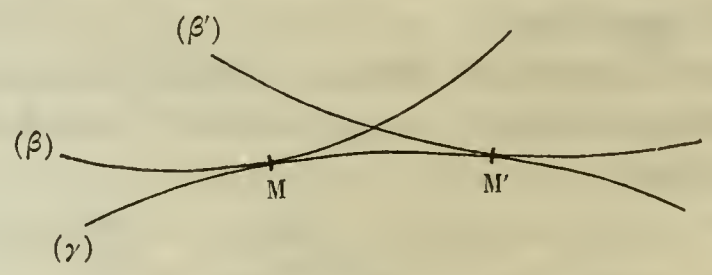
Au contraire, la tangente à la courbe (R) sera définie en différentiant les mêmes équations (41) où α sera considérée comme variable. Mais comme les coefficients $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ seront nuls, on obtiendra le même résultat que pour les génératrices. Toutes les génératrices seront par conséquent tangentes à la courbe (R). Pour éviter la locution incorrecte : *deux génératrices infiniment voisines se rencontrent*, nous dirons qu'elles ont une enveloppe, que nous appellerons arête de rebroussement de la surface engendrée.

Il peut se faire que la génératrice soit définie d'une autre manière, par exemple que les coordonnées x, y, z soient exprimées en fonction de α et d'un autre paramètre t, variable sur chaque courbe. Alors on aura

$$(43)\qquad x=f(\alpha,t),\qquad y=\varphi(\alpha,t),\qquad z=\psi(\alpha,t),$$

et il est facile d'exprimer que les génératrices ont une enveloppe.

Fig. 1.



Soient en effet (γ) l'enveloppe et (β), (β') deux génératrices. Si à

partir du point M on se déplace sur l'une des génératrices, on aura

$$dx=\frac{\partial f}{\partial t}dt,\qquad dy=\frac{\partial \varphi}{\partial t}dt,\qquad dz=\frac{\partial \psi}{\partial t}dt;$$

si on se déplace sur l'enveloppe, α et t varieront à la fois; on aura donc

$$dx=\frac{\partial f}{\partial t}dt+\frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha,\quad dy=\frac{\partial \varphi}{\partial t}dt+\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}d\alpha,\quad dz=\frac{\partial \psi}{\partial t}dt+\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}d\alpha.$$

Les tangentes aux deux courbes doivent être les mêmes; il faudra que l'on ait

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial t}}{\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}}=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial t}}{\dfrac{\partial y}{\partial \alpha}}=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial t}}{\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}},$$

et cela en tous les points d'une courbe, c'est-à-dire en prenant pour t une certaine fonction de α, α restant arbitraire.

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser le beau théorème que M. Bouquet a établi pour les surfaces réglées.

Reprenons les équations (43)

$$x=f(\alpha,\ t),\qquad y=\varphi(\alpha,\ t),\qquad z=\psi(\alpha,\ t),$$

qui définissent la génératrice, et supposons d'abord qu'il n'y ait pas d'enveloppe.

Passons d'un point $(\alpha,\ t)$ sur la génératrice (α), et de coordonnées x, y, z, à un point $(\alpha+h,\ t+k)$ situé sur la génératrice $(\alpha+h)$ et de coordonnées x', y', z'. On aura

$$x'-x=\frac{\partial f}{\partial \alpha}h+\frac{\partial f}{\partial t}k+\cdots$$
$$y'-y=\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}h+\frac{\partial \varphi}{\partial t}k+\cdots$$
$$z'-z=\frac{\partial \psi}{\partial \alpha}h+\frac{\partial \psi}{\partial t}k+\cdots$$

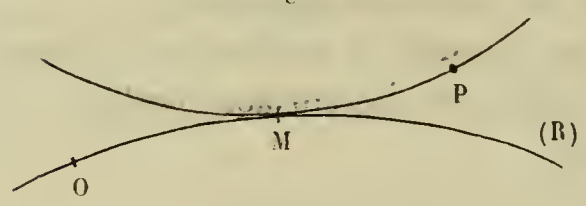
Comme les dérivées par rapport à α ne sont, pour aucune valeur de t, proportionnelles aux trois dérivées par rapport à t, on ne pourra pas annuler les termes du premier ordre dans les trois se-

conds membres, et, par suite, la distance de deux points infiniment voisins sera toujours du même ordre.

Si au contraire les génératrices ont une enveloppe, il y aura un point sur la génératrice α pour lequel une valeur convenablement choisie de $\frac{h}{k}$ fera disparaître les termes du premier ordre, et, par conséquent, dans le voisinage de l'arête de rebroussement, la distance de deux génératrices infiniment voisines sera au moins du second ordre, par rapport à leur distance en une région éloignée de l'arête de rebroussement. Je dis que cette distance sera, en général, du troisième ordre.

Pour bien établir cette proposition, je vais choisir, à la place de t et de α, des variables indépendantes, dont la signification géométrique soit connue. Je définirai la position d'une génératrice tangente en M à l'arête de rebroussement (R), par l'arc $s = \mathrm{OM}$ de cette courbe de rebroussement, compté à partir d'une origine fixe O, et la position du point P sur la génératrice par l'arc $\sigma = \mathrm{MP}$, compté à partir du point M. Alors les coordonnées d'un point quelconque P de la surface engendrée seront des fonctions de s et de σ, et pour exprimer que la génératrice est tangente à l'arête de rebroussement, il suffira d'écrire que l'on a

Fig. 2.



$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{d\sigma}, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial \sigma}, \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial \sigma},$$

pour

$$\sigma = 0.$$

Remarquons, en outre, d'après le choix des variables, que l'on aura toujours

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2 = 1,$$

quels que soient s et σ. En tenant compte de ces relations et supposant que la tangente au point M ait été prise pour axe des x, que

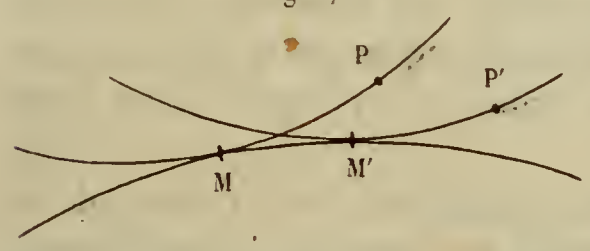
l'origine O des arcs s ait été prise en M, on voit que s et σ seront infiniment petites dans la région de la surface voisine de M, et l'on obtient sans difficulté des développements de la forme suivante :

$$(44)\qquad \begin{cases} x = s + \sigma + \dots \\ y = a(s+\sigma)^2 + b\sigma^2 + \dots \\ z = a_1(s+\sigma)^2 + b_1\sigma^2 + \dots \end{cases}$$

en négligeant les termes du troisième ordre, qui n'ont aucune influence sur le résultat.

Cela posé, soit P un point, pris sur la génératrice tangente en M, correspondant aux valeurs $(0, \sigma)$ de s et de σ, et P′ un point sur la génératrice voisine, correspondant aux valeurs $h = \mathrm{MM}'$ de s et σ' de σ. Supposons h donné, et voyons si on peut disposer de σ et de σ', de manière à rendre la distance PP′ infiniment petite du troisième ordre par rapport à h. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant que les trois différences $x' - x$, $y' - y$, $z' - z$ des coordonnées des points P, P′ soient du troisième ordre. Or ces différences ont pour valeurs

Fig. 3.



$$x' - x = h + \sigma' - \sigma + \dots$$
$$y' - y = a\left[(h+\sigma')^2 - \sigma^2\right] + b\left(\sigma'^2 - \sigma^2\right) + \dots$$
$$z' - z = a_1\left[(h+\sigma')^2 - \sigma^2\right] + b_1\left(\sigma'^2 - \sigma^2\right) + \dots$$

en négligeant les termes qui seront du troisième ordre, si σ, σ' sont du premier. Posons d'abord

$$(45)\qquad h + \sigma' - \sigma = \alpha h^3 + \dots$$

puis

$$(46)\qquad \sigma' + \sigma = \beta h^2 + \dots$$

les constantes α, β étant quelconques, on en déduira

$$\sigma' = -\frac{h}{2} + \frac{\beta h^2}{2} + \dots$$

$$\sigma = \frac{h}{2} + \frac{\beta h^2}{2} + \dots$$

et

$$\sigma'^2 - \sigma^2 = (\alpha h^2 - 1)\,\beta h^3 + \dots$$

$$(h+\sigma')^2 - \sigma^2 = (h+\sigma'-\sigma)(h+\sigma'+\sigma) = \alpha h^3 (h+\beta h^2) + \dots$$

Ces dernières différences étant au moins du troisième ordre, il en sera de même de $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, et, par conséquent, de la distance PP'.

On voit que les arcs σ, σ' sont sensiblement égaux et de signes contraires. Les points des deux courbes qui sont à une distance infiniment petite du troisième ordre sont donc très voisins du point où les génératrices paraissent se couper sur la figure, ou, si l'on veut, paraissent se couper quand on les regarde d'un point quelconque de l'espace.

Un point qu'il est intéressant d'examiner, c'est la forme de la surface engendrée, dans le voisinage de l'arête de rebroussement. En remplaçant $s+\sigma$ par u et en choisissant de nouveaux plans des zx, yx qui ne seront plus rectangulaires, on aura

$$x = u + \dots$$

$$k(a_1 y - az) = y_1 = Au^2 + \dots$$

$$k'(b_1 y - bz) = z_1 = B\sigma^2 + \dots$$

les termes du troisième degré étant négligés; si l'on supposait u et σ du même ordre, $\frac{y_1}{x}$, $\frac{z_1}{x}$ seraient infiniment petits avec u, et l'on aurait des points tels que la droite qui les joint à l'origine fasse un angle très petit avec l'axe des x, c'est-à-dire soit très voisine de la tangente à l'arête de rebroussement. Pour avoir les points de la surface tels que cette droite fasse un angle fini avec l'arête de rebroussement, il faut supposer que u soit de l'ordre de σ^2.

Alors $\frac{z_1}{x}$ sera fini et, en gardant les termes de degré moindre, on aura

$$x = u + \ldots$$
$$y_1 = C\sigma^3 + \ldots$$
$$z_1 = B\sigma^2 + \ldots$$

d'où résulte l'expression approchée

$$\frac{z_1}{B} = \left(\frac{y_1}{C}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad y_1 = C\left(\frac{z_1}{B}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{47}$$

de l'équation de la surface dans le voisinage de l'arête de rebroussement. Cette forme de l'équation justifie bien le nom que nous avons donné à la courbe (R). y_1 ne sera réelle que si z_1 est du signe de B, et elle aura deux valeurs. On a donc deux nappes de la surface venant se raccorder tangentiellement. Les génératrices, en venant toucher l'arête de rebroussement, passent d'une nappe sur l'autre. Tous ces faits concordent avec ceux que l'on connaît pour les surfaces développables.

L'application de ces remarques aux surfaces intégrales est évidente. Nous voyons que l'enveloppe des caractéristiques a été nommée à bon droit arête de rebroussement, et nous reconnaissons aussi que ces courbes se succèdent de telle manière que la plus courte distance de deux de ces courbes consécutives soit un infiniment petit du troisième ordre dans le voisinage de l'arête de rebroussement.

Nous terminerons cet article en démontrant quelques propositions qui ont déjà été signalées par M. Lie dans un Mémoire inséré au tome V des *Mathematische Annalen*, p. 153.

Si deux surfaces intégrales contiennent la même caractéristique et qu'elles n'aient pas un contact du second ordre suivant cette caractéristique, il n'y a aucune relation de contact entre leurs arêtes de rebroussement. Supposons, au contraire, qu'elles aient un contact du second ordre suivant une caractéristique, leurs arêtes de rebroussement seront tangentes.

En effet, soient

$$V = 0, \qquad \delta V = 0, \qquad \delta^2 V = 0$$

les équations finies de l'arête de rebroussement, et

$$dV = 0, \qquad d\delta V = 0$$

ses équations différentielles du premier ordre. Soit $b = f(a)$ la fonction de a qui figure dans l'intégrale. Si pour deux intégrales et pour la même valeur de a, les quantités b, $\frac{db}{da}$, $\frac{d^2b}{da^2}$ ont la même valeur, nous savons que les intégrales auront un contact du second ordre en tous les points de la caractéristique correspondante. En outre, les équations précédentes mettent en évidence que les arêtes de rebroussement des deux surfaces passeront au même point de cette caractéristique et y seront tangentes.

En général, si deux intégrales ont un contact du $n^{\text{ième}}$ ordre en tous les points d'une caractéristique, les arêtes de rebroussement auront un contact d'ordre $n - 1$.

Nous ajouterons une dernière et curieuse propriété des courbes intégrales. Elles ont un contact du second ordre avec les surfaces intégrales qui sont assujetties à la seule condition de leur être tangentes. Soient, en effet,

$$V = 0, \qquad \delta V = 0, \qquad \delta^2 V = 0$$

les équations d'une courbe intégrale. On en déduit

$$dV = 0, \qquad d\delta V = 0, \qquad d^2 V = 0.$$

Les trois équations

$$V = 0, \qquad dV = 0, \qquad d^2 V = 0,$$

montrent bien que l'intégrale complète

$$V = 0$$

est coupée en trois points consécutifs par la courbe intégrale.

Ce raisonnement s'étend à toutes les intégrales, aussi bien générales que complètes.

§ 9. D'UNE CLASSE REMARQUABLE D'INTÉGRALES.

Dans l'article précédent, nous avons étendu les notions relatives aux surfaces réglées à toutes les surfaces formées de caractéristiques et, en général, de courbes continues quelconques. L'étude que nous avons faite va nous conduire à une classe nouvelle d'intégrales, que l'analogie ne pouvait faire découvrir, et qui disparaissent dès que les caractéristiques sont des droites. Nous obtiendrons des intégrales sans rebroussement apparent, non encore signalées.

Si dans l'intégrale complète nous remplaçons b par une fonction de a, nous obtenons une intégrale générale dont l'arête de rebroussement sera donnée par les équations

$$\text{(48)} \qquad V = 0, \quad \delta V = 0, \quad \delta^2 V = 0;$$

je dis que l'on pourra toujours trouver une fonction b de a telle, que l'équation

$$\text{(49)} \qquad \delta^3 V = 0$$

soit satisfaite pour tous les points de l'arête de rebroussement.

En effet, l'équation (49) peut évidemment être remplacée par la suivante

$$d\delta^2 V = 0,$$

qu'on obtient en différentiant la troisième des équations (48) et en tenant compte de l'équation (49). En vertu des équations (48), (49), on aura en tous les points de l'arête de rebroussement

$$V = 0, \quad dV = 0, \quad \delta V = 0, \quad d\delta V = 0, \quad \delta^2 V = 0, \quad d\delta^2 V = 0.$$

Si entre ces six équations on élimine a, b, b', b'', on obtiendra deux équations différentielles du premier ordre en x, y, z, définissant les courbes cherchées. On voit qu'il en passera un nombre déterminé par chaque point de l'espace.

On peut aussi former, en employant *exclusivement* l'équation aux dérivées partielles, les équations différentielles de ces courbes.

Ce procédé aura même l'avantage de nous en faire connaître une propriété géométrique.

En différentiant les équations (48) et tenant compte des équations (48), (49), on a en un point quelconque de l'arête de rebroussement

$$V = 0, \quad dV = 0, \quad d^2V = 0, \quad d^3V = 0,$$
$$\delta V = 0, \quad d\delta V = 0, \quad d^2\delta V = 0, \quad d\delta^3 V = 0.$$

Si nous considérons la caractéristique définie par les équations

$$V = 0, \quad \delta V = 0,$$

où l'on regarde a comme une constante, on voit que les différentielles premières et secondes de x, y, z, mais non les différentielles troisièmes, seront les mêmes pour cette caractéristique et pour la courbe cherchée. Ainsi, si en prenant les équations de la caractéristique on calcule $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, ces deux dérivées seront les mêmes que pour notre courbe; mais on verra facilement qu'il n'en est plus de même pour $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$. En effet, p par exemple étant donné par l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

il faudra, pour avoir $\frac{dp}{dx}$, différentier cette équation, en laissant a, b constants dans le cas de la caractéristique et en les traitant comme variables dans le cas de l'arête de rebroussement, ce qui donnera deux valeurs différentes de $\frac{dp}{dx}$.

On a, pour toute courbe intégrale aussi bien que pour la caractéristique,

$$dz = pdx + qdy, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial q}}{\frac{\partial F}{\partial p}},$$

et, par conséquent, en posant

$$P = \frac{\partial f}{\partial p}, \qquad Q = \frac{\partial f}{\partial q},$$

on obtient

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\partial\left(\frac{Q}{P}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{Q}{P}\right)}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\left(\frac{Q}{P}\right)}{\partial p}\frac{dp}{dx}+\frac{\partial\left(\frac{Q}{P}\right)}{\partial q}\frac{dq}{dx},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{dp}{dx}+\frac{dq}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}+q\frac{d^2y}{dx^2}:$$

Nous savons que $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, mais non $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$, sont les mêmes pour la courbe cherchée et la caractéristique. Il faut donc que des équations précédentes on ne puisse tirer $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$; car, sans cela, ces deux dérivées auraient la même valeur pour les deux courbes. Donc le déterminant des deux dernières équations, considérées comme définissant les deux inconnues $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$, doit être nul, ce qui donne

$$\frac{\partial\left(\frac{Q}{P}\right)}{\partial p}=\frac{dx}{dy}\frac{\partial\left(\frac{Q}{P}\right)}{\partial q}. \tag{50}$$

Cette équation, jointe à la suivante,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P}, \tag{51}$$

exprime, on le verra aisément, la propriété suivante :

Le système

$$\begin{cases} f(x,y,z,p,q)=0, \\ dz=p\,dx+q\,dy, \end{cases} \tag{52}$$

étant considéré comme devant déterminer p et q (x, y, z, dx, dy, dz, étant supposés connus), admet une solution triple. Il suffit, en effet, de substituer la valeur de p tirée de la seconde équation dans la première, et les équations (50), (51) expriment que l'équation en q, ainsi obtenue, admet une racine triple.

Or, considérer dans le système (52) p et q comme des inconnues, c'est chercher l'intersection du cône (N) des normales avec le plan

$$(X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0,$$

normal à la courbe cherchée. Ce plan, coupant suivant trois droites

confondues, doit donc être un *plan d'inflexion* du cône des normales, et, par conséquent, la tangente à la courbe doit être une arête de rebroussement du cône (T). Ainsi

Les courbes cherchées sont celles qui en chaque point admettent comme tangentes les arêtes de rebroussement des cônes (T), *ou dont les tangentes sont perpendiculaires aux plans d'inflexion du cône* (N) *des normales.*

On démontrerait comme précédemment *qu'elles coupent en quatre points confondus les intégrales de l'équation aux dérivées partielles qui leur sont tangentes.*

Imaginons, par exemple, que les intégrales complètes soient des sphères assujetties à deux conditions quelconques. Alors les intégrales ordinaires seront obtenues comme enveloppes d'une suite de sphères; chacune des sphères coupera l'arête de rebroussement en trois points consécutifs, et les caractéristiques seront des cercles simplement tangents à cette arête. Mais il y aura aussi des intégrales pour lesquelles les sphères seront osculatrices à l'arête de rebroussement, les cercles caractéristiques devenant les cercles osculateurs de ces courbes.

M. Serret a examiné en particulier [1] le cas où les sphères ont des rayons quelconques, mais ont leurs centres sur une courbe donnée (C). Les intégrales nouvelles que nous signalons deviennent ici celles qui ont été cherchées par M. Serret, et pour lesquelles la courbe donnée est le lieu des centres des sphères osculatrices à l'arête de rebroussement de l'intégrale. On sait, conformément à notre proposition générale, qu'alors les plans normaux à l'enveloppe des caractéristiques sont les plans osculateurs du lieu des centres des sphères osculatrices et, par conséquent, les plans d'inflexion du cône (N) des normales. En effet, l'équation aux dérivées partielles admettant comme intégrales complètes les sphères considérées s'obtient évidemment en exprimant que les normales aux

[1] *Journal de M. Liouville*, t. XVIII, 1re série, p. 31.

surfaces intégrales rencontrent la courbe (C). Le cône (N) des normales relatif à un point quelconque contient donc toujours la courbe (C), et les plans d'inflexion de ce cône sont bien des plans osculateurs de la courbe (C).

On pourrait essayer de continuer dans cet ordre d'idées. Mais, en général, il n'existera pas de courbe intégrale pour laquelle on ait

$$V = 0, \qquad \delta V = 0, \qquad \ldots, \qquad \delta^p V = 0,$$

p étant supérieur à 3. Cela aura lieu seulement dans les cas exceptionnels.

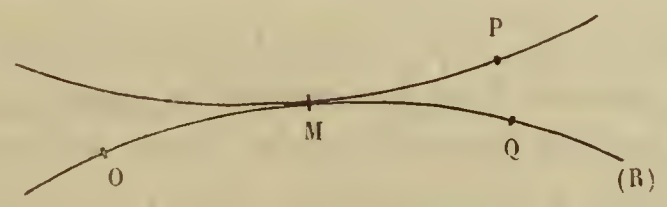
M. Bouquet a montré que, si la plus courte distance de deux droites infiniment voisines d'une surface réglée est d'un ordre supérieur à 3, elle est nulle. Il n'existe pas de théorème analogue quand on prend des courbes quelconques. Nous allons poursuivre l'étude de cette question.

Proposons-nous de trouver l'équation générale d'un système de courbes (K) ayant avec une courbe fixe (R) un contact d'ordre n. Supposons que les coordonnées d'un point de la courbe fixe s'expriment en fonction de l'arc par les formules

$$x = f(s), \qquad y = f_1(s), \qquad z = f_2(s).$$

Nous choisirons, pour exprimer les coordonnées des points des courbes tangentes (K), les mêmes variables que dans l'article pré-

Fig. 4.



cédent, c'est-à-dire l'arc $s = OM$, compté à partir d'une origine fixe sur la courbe (R), et l'arc $MP = \sigma$, compté à partir du point de contact sur la courbe (K).

Soient x, y, z, les coordonnées d'un point P infiniment voisin

de M sur la courbe (K). Si les deux courbes ont un contact d'ordre n, on devra pouvoir choisir un point Q sur la courbe (R) à la distance $MQ = v$ telle, que les projections de PQ sur les trois axes soient de l'ordre $n+1$, par rapport à $MP = \sigma$. Les projections de PQ étant

$$x - f(s+v), \qquad y - f_1(s+v), \qquad z - f_2(s+v),$$

il faudra que l'on ait

$$\begin{aligned} x &= f(s+v) + \sigma^{n+1}\varphi(s,\sigma), \\ y &= f_1(s+v) + \sigma^{n+1}\varphi_1(s,\sigma), \\ z &= f_2(s+v) + \sigma^{n+1}\varphi_2(s,\sigma), \end{aligned}$$

v étant une fonction de s et de σ, dont le rapport à σ a évidemment l'unité pour limite et qui sera de la forme

$$v = \sigma + \varpi_2\sigma^2 + \varpi_3\sigma^3 \ldots + \varpi_n\sigma^n,$$

$\varpi_2, \varpi_3, \ldots \varpi_n$, désignant des fonctions quelconques de s. Nous pouvons négliger les termes en σ^{n+1}, qui n'ont aucune influence sur l'ordre de PQ.

Ainsi, nous avons pour l'expression générale des coordonnées d'un point P des courbes (K)

$$(53)\quad \begin{cases} x = f(s+\sigma+\varpi_2\sigma^2 \ldots + \varpi_n\sigma^n) + \sigma^{n+1}\alpha_{n+1} + \sigma^{n+2}\alpha_{n+2} + \ldots \\ y = f_1(s+\sigma+\varpi_2\sigma^2 \ldots + \varpi_n\sigma^n) + \sigma^{n+1}\beta_{n+1} + \sigma^{n+2}\beta_{n+2} + \ldots \\ z = f_2(s+\sigma+\varpi_2\sigma^2 \ldots + \varpi_n\sigma^n) + \sigma^{n+1}\gamma_{n+1} + \sigma^{n+2}\gamma_{n+2} + \ldots \end{cases}$$

$\varpi_2, \varpi_3, \varpi_n, \alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1}$, étant des fonctions quelconques de s. Réciproquement, il est évident que les équations précédentes représentent bien des courbes ayant au moins un contact d'ordre n avec (R). Voyons à quelles conditions elles peuvent avoir un contact d'ordre supérieur.

A cet effet, considérons le point de l'enveloppe (R) correspondant à la valeur de l'arc

$$s + \sigma + \varpi_2\sigma^2 \ldots + \varpi_n\sigma^n + u.$$

Il faudra, pour qu'il y ait un contact d'ordre supérieur à n, que l'on puisse déterminer u de telle manière que les différences des coordonnées correspondantes du point de l'enveloppe et du point de la courbe (K) donné par les formules (53) soient de l'ordre $n+2$ au moins par rapport à σ. La différence des valeurs de x, par exemple, est

$$f(s+\sigma+\varpi_2\sigma^2\ldots+\varpi_n\sigma^n+u)-f(s+\sigma\ldots+\varpi_n\sigma^n)-\alpha_{n+1}\sigma^{n+1}\ldots$$

ou, en développant et gardant les termes de degré moindre,

$$f'(s)\,u-\sigma^{n+1}\alpha_{n+1}.$$

Pour que cette différence soit de l'ordre $n+2$, il faut que l'on ait

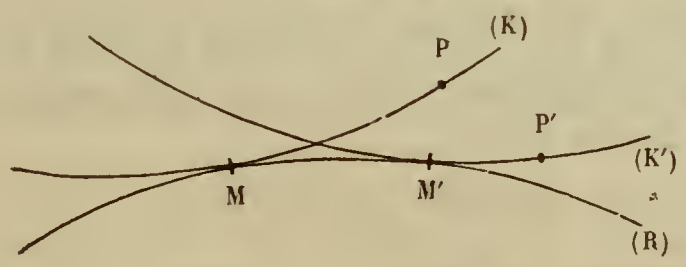
$$u=\sigma^{n+1}\frac{\alpha_{n+1}}{f'(s)}+\ldots$$

En comparant ce résultat à celui que donneraient les différences des y et des z, on voit que l'on devrait avoir

$$\frac{\alpha_{n+1}}{f'(s)}=\frac{\beta_{n+1}}{f_1'(s)}=\frac{\gamma_{n+1}}{f_2'(s)}. \tag{54}$$

Nous supposerons que ces équations ne soient *jamais* satisfaites, afin que le contact soit bien de l'ordre n seulement.

Fig. 5.



Cela posé, voyons quelle sera la plus courte distance de deux courbes (K), (K'), dans le voisinage de l'arête de rebroussement.

Soient s, σ les coordonnées d'un point P de la première courbe, $s'=s+h$, σ' celles d'un point P' de la seconde. Nous supposons

que $h = \mathrm{MM}'$ soit donné. Alors σ, σ' seront des fonctions inconnues de h,

$$\sigma = ah + bh^2 + \dots$$
$$\sigma' = a'h + b'h^2 + \dots$$

qu'il s'agira de déterminer par la condition que la distance PP′ soit de l'ordre le plus petit possible. Soient x, y, z, les coordonnées du point P, x', y', z', celles de P′. On aura

$$x' - x = f(s' + \sigma' + \varpi_2'\sigma'^2 \dots + \varpi_n'\sigma'^n) - f(s + \sigma + \varpi_2\sigma^2 \dots + \varpi_n\sigma^n) + \rho_1$$
$$\rho_1 = (\sigma'^{n+1} - \sigma^{n+1})\,\alpha_{n+1} + \dots$$

$\varpi_2' \dots \varpi_n'$ désignant les fonctions $\varpi_2 \dots \varpi_n$, où l'on a remplacé s par $s' = s + h$; nous n'avons écrit que le premier terme de ρ_1.

ρ_1 étant du degré $n+1$, pour que la différence $x' - x$ et de même $y' - y$, $z' - z$ soient de l'ordre $n+1$, il suffira que la différence

$$\mathrm{D} = s' + \sigma' + \varpi_2'\sigma'^2 \dots + \varpi_n'\sigma'^n - s - \sigma - \varpi_2\sigma^2 \dots - \varpi_n\sigma^n$$

soit de cet ordre. C'est ce qu'il est toujours possible de réaliser. Il suffit, en effet, de substituer dans l'expression de D à s', σ', σ leurs valeurs en h et d'égaler à zéro les coefficients des premières puissances de h. Par exemple, la première équation, celle qu'on obtient en égalant les coefficients de h est

$$1 + a' - a = 0, \tag{55}$$

et les autres n'imposent aucune condition nouvelle à a et a'. Ainsi on pourra toujours disposer de σ, σ', de telle manière que D soit une fonction d'ordre $n+1$.

$$\mathrm{D} = kh^{n+1} + k'h^{n+1} + \dots$$

k, k' étant absolument arbitraires et pouvant même être supposés nuls.

Ainsi, deux courbes infiniment voisines sont toujours à une distance d'ordre au moins égal à $n+1$. Voyons si la plus courte distance peut être d'un ordre supérieur.

Les termes en h^{n+1} sont

dans $x'-x$

$$[f'(s)\,k+(a'^{n+1}-a^{n+1})\,\alpha_{n+1}(s)]\,h^{n+1},$$

dans $y'-y$

$$[f_1'(s)\,k+(a'^{n+1}-a^{n+1})\,\beta_{n+1}(s)]\,h^{n+1},$$

dans $z'-z$

$$[f_2'(s)\,k+(a'^{n+1}-a^{n+1})\,\gamma_{n+1}(s)]\,h^{n+1}.$$

Comme on n'a jamais

$$\frac{\alpha_{n+1}(s)}{f'(s)}=\frac{\beta_{n+1}(s)}{f_1'(s)}=\frac{\gamma_{n+1}(s)}{f_2'(s)},$$

pour que ces termes disparaissent, il faut que l'on ait

$$k=0, \qquad a'^{n+1}-a^{n+1}=0.$$

Il est toujours possible, nous l'avons dit, de satisfaire à la première équation, mais la seconde

$$a'^{n+1}-a^{n+1}=0$$

est incompatible avec l'équation (55) toutes les fois que n est pair, *au moins si l'on se borne aux valeurs réelles.* Ainsi nous obtenons ce remarquable théorème :

Si des courbes variables ont un contact d'ordre n avec une courbe fixe, la plus courte distance de deux courbes infiniment voisines dans le voisinage de la courbe fixe ne sera jamais d'un ordre supérieur à $n+1$, *si n est pair; elle sera toujours au moins de l'ordre* $n+2$ *si n est impair, mais elle pourra être d'un ordre supérieur.*

Sans approfondir cette question si générale, je donnerai seulement un exemple justifiant la dernière partie de l'énoncé précédent. Le système

$$x=f(s+\sigma+\varpi_2\sigma^2\ldots\varpi_n\sigma^n)+\sigma^{n+1}\psi(s)\,\mathrm{F}(s+\sigma)+\sigma^{n+3}\varphi(s,\sigma),$$
$$y=f_1(\qquad\qquad)+\sigma^{n+1}\psi(s)\,\mathrm{F}_1(s+\sigma)+\sigma^{n+3}\varphi_1(s,\sigma),$$
$$z=f_2(\qquad\qquad)+\sigma^{n+1}\psi(s)\,\mathrm{F}_2(s+\sigma)+\sigma^{n+3}\varphi_2(s,\sigma),$$

représente des courbes qui ont seulement un contact d'ordre n avec leur enveloppe et telles que la plus courte distance de deux courbes consécutives sera de l'ordre $n+3$ au moins, toutes les fois que n sera impair.

Il y a à faire une remarque assez curieuse sur le théorème précédent. Rien dans la démonstration n'exclut les courbes planes situées dans le même plan, et cependant le théorème ne leur semble pas applicable, puisque des courbes planes se coupent toujours dans le voisinage des points de contact avec l'enveloppe. Par exemple, d'après le théorème, les cercles osculateurs d'une courbe plane aussi bien que d'une courbe gauche doivent être à une distance infiniment petite du troisième ordre, dans le voisinage de leur point d'osculation.

Mais la contradiction n'est qu'apparente. Toutes les fois que des courbes planes auront un contact d'ordre pair avec leur enveloppe, deux courbes consécutives ne se couperont pas en un point *réel*, voisin de leurs points d'osculation. C'est ce qu'il est aisé de vérifier pour les cercles osculateurs. Car, soient O, O′ les centres de deux cercles osculateurs infiniment voisins d'une courbe plane. La distance OO′ des centres sera plus petite que la différence des rayons, qui est l'arc OO′ de la développée. Ces deux cercles ne se couperont donc pas, et leur plus courte distance sera bien du troisième ordre dans le voisinage de leurs points de contact. Cette plus courte distance est égale à l'arc OO′ de la développée, moins la corde OO′.

Appliquons les résultats obtenus aux intégrales exceptionnelles étudiées au début de cet article. Alors les caractéristiques auront avec leur enveloppe (R) un contact du second ordre. Les formules (53) deviendront

$$x = f(s+\sigma+\varpi\sigma^2)+\sigma^3\psi(s,\sigma),$$
$$y = f_1(s+\sigma+\varpi\sigma^2)+\sigma^3\psi_1(s,\sigma),$$
$$z = f_2(s+\sigma+\varpi\sigma^2)+\sigma^3\psi_2(s,\sigma).$$

Pour étudier la surface engendrée, posons

$$u = s + \sigma + \varpi_2 \sigma^2,$$

et nous aurons

$$x = f(u) + \sigma^3 (\quad),$$
$$y = f_1(u) + \sigma^3 (\quad),$$
$$z = f_2(u) + \sigma^3 (\quad).$$

Supposons que l'on prenne pour axe des x la tangente en un point de (R), pour axe des y et des z des perpendiculaires à cette tangente, nous aurons des développements en série de la forme suivante

$$x = u + b\sigma^3, \qquad y = au^2 + b'\sigma^3, \qquad z = a_1 u^2 + b''\sigma^3,$$

où nous avons gardé les termes de moindre degré. On peut même supposer que le plan des xz ait été choisi de telle manière que le terme en σ^3 disparaisse de l'expression de z, ce qui donnera

$$(56) \qquad \begin{cases} x = au + b\sigma^3, \\ y = a'u^2 + b'\sigma^3, \\ z = a''u^3 + b''\sigma^4, \end{cases}$$

les termes négligés étant de degré supérieur au degré de l'un des deux termes conservés.

Si l'on veut avoir la forme de la surface dans le voisinage de l'arête de rebroussement, qui, on le sait, est tangente à Ox, il faut établir entre u et σ une relation telle que, pour les points correspondants, $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$ soient finis. Il faudra donc que u et σ^3 soient du même ordre, ce qui donnera, en conservant les termes de moindre degré,

$$x = au + b\sigma^3, \quad \cdot \quad y = b'\sigma^3, \qquad z = b''\sigma^4,$$

et, par suite,

$$(57) \qquad \frac{z}{b''} = \left(\frac{y}{b'}\right)^{\frac{4}{3}}, \qquad z = \mathrm{K}\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{4}{3}}.$$

C'est là l'équation approchée de la surface. On voit que la forme

générale de la surface serait la même si l'on avait $z = Ky^2$. Ainsi, il n'y aura plus de rebroussement *apparent*, z sera de l'ordre $\frac{4}{3}$ au lieu d'être de l'ordre 2.

Par exemple, l'enveloppe des sphères osculatrices d'une courbe donnée n'admettra pas cette courbe pour ligne de rebroussement. C'est ce qu'on peut vérifier par un calcul direct appliqué à l'hélice.

Les intégrales dont nous signalons ici l'existence ont donc des caractères remarquables; leurs relations avec l'enveloppe des caractéristiques sont tout à fait différentes de celles des intégrales ordinaires, que nous avions déjà étudiées.

§ 10. ANALOGIES NOUVELLES ENTRE LES LIGNES DROITES ET LES CARACTÉRISTIQUES.

Nous avons, dans les articles précédents, étendu aux caractéristiques plusieurs des propriétés des lignes droites. Voici une nouvelle analogie qui nous paraît digne de remarque. Nous allons démontrer que la théorie des tangentes conjuguées s'étend aux caractéristiques.

Partons de l'intégrale complète

$$V(x, y, z, a, b) = 0. \tag{58}$$

On sait qu'on en déduit la solution singulière en éliminant a et b entre cette équation et les suivantes

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial a} = 0, \qquad V_2 = \frac{\partial V}{\partial b} = 0; \tag{59}$$

a et b peuvent donc être regardés comme des coordonnées curvilignes propres à déterminer la position d'un point sur l'intégrale singulière.

Soient a_0, b_0 les valeurs correspondantes à un point M de cette intégrale. Il passera en ce point une infinité de caractéristiques tangentes à l'intégrale singulière. Car, si l'on considère toutes celles qui sont données par les équations

$$V(x, y, z, a_0, b_0) = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_0} + b' \frac{\partial V}{\partial b^2} = 0, \tag{60}$$

il est clair que ces équations sont vérifiées, quel que soit b', par les coordonnées du point M.

Ainsi, en chaque point de l'intégrale singulière, il passe une infinité de caractéristiques tangentes à cette intégrale, de même que, par chaque point d'une surface quelconque, il passe une infinité de tangentes. En outre, la surface engendrée par toutes ces caractéristiques est l'intégrale complète tangente à l'intégrale singulière au point considéré, de même que le lieu des tangentes à une surface en un point est le plan tangent en ce point.

Cela posé, supposons qu'entre a et b on établisse une relation quelconque satisfaite par les valeurs a_0, b_0

$$b = f(a);$$

à cette suite de valeurs de a et de b ainsi définie correspondra une courbe Mμ de l'intégrale singulière passant au point M. Cherchons la tangente en M à cette courbe. En tous ses points on a

$$V_1 = 0, \qquad V_2 = 0,$$

et, par suite,

$$dV_1 + da\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\,b'\right) = 0,$$

$$dV_2 + da\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2}\,b'\right) = 0;$$

d'où, en éliminant da, on déduit

$$\frac{dV_1}{dV_2} = \frac{\dfrac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\,b'}{\dfrac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial b^2}\,b'}, \qquad b' = f'(a). \tag{61}$$

Cela posé, déplaçons-nous à partir du point M sur une autre courbe Mμ', déterminée par l'équation

$$b = \varphi(a),$$

et cherchons l'enveloppe des intégrales complètes tangentes à

l'intégrale singulière en tous les points de cette courbe. Cette enveloppe sera définie par les deux équations

$$V = 0, \qquad V_1 + b_1' V_2 = 0,$$

où b_1' désigne maintenant $\varphi'(a)$. Les deux équations précédentes représentent la caractéristique qui engendre cette intégrale. Cherchons la tangente à la caractéristique qui passe en M. En différentiant les équations précédentes on a

$$(62) \qquad dV = 0, \qquad dV_1 + b_1' dV_2 = 0.$$

Si donc nous voulons que cette caractéristique soit tangente à la courbe Mμ, la comparaison des équations (61), (62), nous donnera la condition

$$b_1' = -\frac{\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b} b'}{\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b} + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} b'},$$

qui est nécessaire et suffisante. En chassant les dénominateurs, on trouve

$$(63) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}(b' + b_1') + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} b'\, b_1' = 0.$$

La symétrie de cette relation en b', b_1' nous conduit au théorème suivant :

Supposons que, lorsqu'on se déplace à partir du point M *de l'intégrale singulière dans une direction* Mμ', *l'intégrale complète tangente en* M *soit coupée par l'intégrale complète tangente au point infiniment voisin suivant une caractéristique admettant pour tangente* Mμ, *réciproquement, lorsqu'on se déplacera suivant la direction* Mμ, *l'intégrale complète tangente au point infiniment voisin coupera l'intégrale complète du point* M *suivant une caractéristique ayant pour tangente* Mμ'.

C'est bien, comme nous l'avons annoncé, la généralisation de la propriété des tangentes conjuguées d'une surface; les plans

tangents sont remplacés ici par des intégrales complètes, les tangentes par des caractéristiques.

La proposition précédente admet comme corollaire la généralisation de la théorie des lignes asymptotiques. Faisons, en effet, dans l'équation (63) $b' = b'_1$, nous aurons

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + 2b' \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial b} + b'^2 \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = 0, \tag{64}$$

équation différentielle qui définit les lignes tracées sur l'intégrale singulière et jouissant des propriétés suivantes. Les intégrales complètes tangentes en tous les points d'une de ces lignes enveloppent une intégrale générale admettant cette ligne pour arête de rebroussement et tangente en tous ses points à l'intégrale singulière. Ces intégrales correspondent aux surfaces développables que l'on obtient en menant des plans tangents à une surface en tous les points d'une ligne asymptotique.

§ 11. ÉTUDE DE L'INTÉGRALE SINGULIÈRE.

La discussion précédente nous a conduit à plusieurs propriétés caractéristiques de l'intégrale singulière, que nous allons résumer ici :

1° Elle est l'enveloppe de toutes les intégrales complètes ou générales.

2° En chacun de ses points et suivant toutes les directions il passe des caractéristiques tangentes à la surface.

3° Par conséquent, le cône (T) enveloppe des plans tangents, relatif à un point de cette surface, s'y décompose en un autre cône et un plan, le plan tangent à cette surface. Il suit de là que le cône des normales (N), supplémentaire du cône (T), aura, pour tous les points de l'intégrale singulière, une *droite double*, la normale à la surface singulière.

4° Enfin, et cette dernière propriété est peut-être celle à laquelle on doit attacher le plus d'importance, si l'on considère une

courbe (K) tracée sur la surface et les plans tangents en tous ses points à la surface, il y aura, outre la solution singulière, une seconde intégrale contenant la courbe (K) et tangente en tous ses points à l'intégrale singulière.

Tels sont les quatre caractères principaux qui résultent de nos études antérieures. A la vérité, dans ces études, nous nous sommes attaché seulement à l'examen des cas généraux, et l'on sait qu'il peut arriver que des surfaces n'aient pas d'enveloppe. Il pourra donc arriver que la solution singulière disparaisse.

Considérons, par exemple, des plans tangents à une courbe comme intégrales complètes. Les intégrales générales seront des surfaces développables contenant la courbe. Mais il n'y aura plus d'enveloppe ou de solution singulière, ou, si l'on veut, la solution singulière sera la courbe elle-même.

Au lieu de ces intégrales complètes, prenons des sphères doublement tangentes à une courbe ou des surfaces passant par des points fixes. Dans tous ces cas, la solution singulière pourra disparaître.

Il est vrai que, par une extension plus grande donnée au mot solution, extension que nous développons dans la seconde partie, on peut réduire beaucoup le nombre des cas exceptionnels, mais il pourra cependant se présenter des cas où la solution singulière disparaîtra toujours.

Considérons, par exemple, les intégrales complètes

$$(z+ax+bxy+b)^2+(z+by+a)^2=(x^2-y^2)^2.$$

En égalant à zéro les dérivées par rapport à a et à b, on trouvera

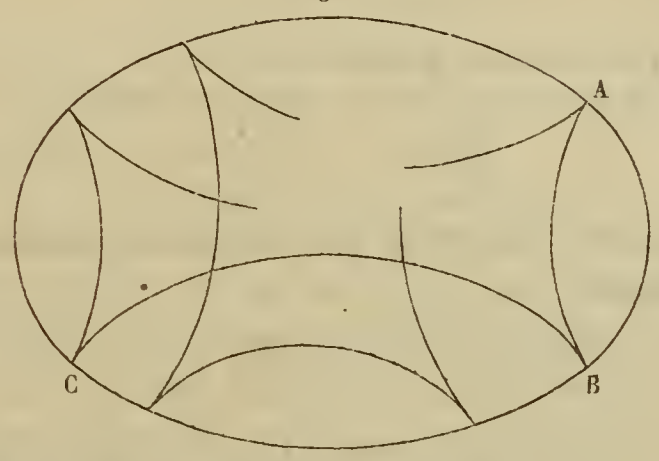
$$z+ax+bxy+b=0,$$
$$z+by+a=0,$$

équations qui, jointes à la précédente, donnent

$$x^2-y^2=0.$$

On trouve donc ici non plus l'enveloppe proprement dite, mais le lieu des points singuliers des intégrales complètes.

Fig. 6.



C'est une circonstance de ce genre qui se présente d'une manière normale pour les intégrales générales d'une équation différentielle ordinaire. Ces intégrales générales sont représentées par des courbes ayant des points de rebroussement aux points où elles coupent une courbe fixe. On voit bien que le lieu des intersections successives de deux courbes infiniment voisines se confondra avec celui des points de rebroussement.

Toutefois, comme des surfaces à deux paramètres ont en général une enveloppe quand leur équation s'obtient en égalant à zéro une fonction toujours finie et continue, telle que les fonctions algébriques entières, il résulte bien nettement de cette première partie de notre étude, que, dans les équations aux dérivées partielles formées par l'élimination des constantes, il y a en général une solution singulière qui possède les caractères que nous avons signalés plus haut. Il nous reste à indiquer comment on déduirait cette solution de l'équation aux dérivées partielles sans faire appel à l'intégrale complète.

§ 12. L'INTÉGRALE SINGULIÈRE DÉDUITE DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Les quatre propriétés que nous avons reconnues à l'intégrale singulière nous donnent chacune la solution de cette question.

D'après la première, la solution singulière est l'enveloppe des intégrales complètes

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \tag{65}$$

c'est-à-dire qu'en tous ses points on a

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

Or on peut obtenir l'équation aux dérivées partielles, en tirant a et b des équations

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z} = 0, \tag{66}$$

et les portant dans l'équation (65). Ainsi l'équation (65) est l'équation aux dérivées partielles, si l'on y regarde a et b comme des fonctions de x, y, z, p, q, définies par les formules (66). On aura donc

$$\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial p} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial p}, \qquad \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial q} + \frac{\partial V}{\partial b}\frac{\partial b}{q}. \tag{67}$$

Or $\frac{\partial V}{\partial a}, \frac{\partial V}{\partial b}$ sont nuls pour la solution singulière. On aura donc aussi

$$\frac{\partial V}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

ou, en considérant z comme une fonction de x, y, p, q, définie par l'équation aux dérivées partielles,

$$\frac{\partial z}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial q} = 0. \tag{68}$$

Cette méthode n'est pas à l'abri de toute objection.

Mais employons les autres propriétés de l'intégrale singulière. D'après le second caractère que nous lui avons reconnu, nous savons qu'en chacun de ses points il passe une infinité de caractéristiques qui lui sont tangentes. Si donc nous nous reportons aux équations différentielles de la caractéristique

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}, \tag{69}$$

nous voyons qu'en chaque point de la solution singulière $\frac{dy}{dx}$ devra être indéterminé, et l'on aura, par conséquent,

$$P=0, \qquad Q=0. \tag{70}$$

D'après le troisième caractère, le cône des normales (N), représenté par l'équation

$$F(x, y, z, p, q)=0,$$

où p et q sont variables, doit avoir pour droite double la normale à l'intégrale singulière. Cette condition s'exprime encore par les équations (70), que nous retrouvons de cette manière.

Servons-nous enfin de la dernière propriété de l'intégrale singulière. Si nous traçons une courbe sur cette intégrale, il doit y avoir deux intégrales tangentes l'une à l'autre en tous les points de cette courbe. Soient

$$y=f(x), \qquad z=\varphi(x)$$

les équations d'une courbe. Pour que l'intégrale contienne cette courbe, il faut qu'en chaque point de la courbe on ait

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

ou

$$\varphi'(x)=p+qf'(x). \tag{71}$$

Différentions cette équation, nous aurons

$$\varphi''(x)=r+2sf'(x)+tf'^2(x)+qf''(x). \tag{72}$$

D'autre part, en vertu de l'équation aux dérivées partielles, on aura

$$\begin{cases} Pr+Qs+X+pZ=0, \\ Ps+Qt+Y+qZ=0. \end{cases} \tag{73}$$

Pour deux surfaces admettant le même plan tangent en chaque point de la courbe, r, s, t seront différents. Donc il faut que les

équations (72), (73) ne puissent déterminer r, s, t. Leur déterminant

$$(Pf' - Q)^2$$

doit donc être nul, quel que soit f', ce qui exige que l'on ait

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Il est vrai que le raisonnement cesserait d'être exact si les deux surfaces avaient un contact du second ordre. Mais alors les dérivées d'ordres supérieurs ne pourront être toutes les mêmes. Or, on le reconnaîtra aisément, le déterminant des équations qui déterminent les dérivées d'ordre n est

$$(Pf' - Q)^n;$$

et, par suite, quel que soit l'ordre à partir duquel les dérivées cessent d'être les mêmes, on retrouve les mêmes conditions.

On a donc, en tout point de l'intégrale singulière,

$$P = 0, \qquad Q = 0.$$

Mais, en vertu des équations (73), on doit aussi joindre à ces équations les deux suivantes

$$X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0.$$

Ainsi nous avons le théorème suivant :

Pour toute équation aux dérivées partielles formée par l'élimination des constantes, il y aura d'une manière normale une solution singulière. Les coordonnées d'un point et les coefficients angulaires du plan tangent en chaque point de cette solution satisfont aux cinq équations

$$(74) \quad F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0, \quad X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0.$$

Remarquons que les deux dernières auraient pu aussi être obtenues en partant des équations différentielles de la caractéristique. Puisqu'il y a une infinité de caractéristiques tangentes en chaque point à l'intégrale singulière, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dq}{dx}$ doivent être indéterminés et,

par conséquent, les dénominateurs $X+pZ$, $Y+qZ$ des équations (69) doivent être nuls, aussi bien que P et que Q.

Il est à remarquer que ces équations sont en nombre plus que suffisant. En effet, admettons que de trois d'entre elles on ait pu déduire les valeurs de z, p, q, en fonction de x et de y. Si l'on porte ces valeurs dans les deux autres équations, elles devront être satisfaites en général. Mais ici il y a une première question qu'il est indispensable de résoudre. Supposons qu'on ait trouvé des valeurs de z, p, q, fonctions de x et de y, et satisfaisant à ces équations, donneront-elles une intégrale de l'équation proposée? Comme ces valeurs de z, p, q satisfont à cette équation, qui est la première du groupe (74), il suffira évidemment de reconnaître si p et q sont les dérivées de z.

Différentions l'équation

$$F=0,$$

nous aurons

$$(75)\qquad Xdx+Ydy+Zdz+Pdp+Qdq=0,$$

et cette relation est toujours satisfaite par les trois fonctions z, p, q, qui satisfont à l'équation proposée. En nous servant des formules

$$X+pZ=0,\qquad Y+qZ=0,\qquad P=0,\qquad Q=0,$$

auxquelles satisfont aussi ces trois fonctions, nous pourrons éliminer X, Y, P, Q, et la relation (75) prendra la forme

$$Z(dz-p\,dx-q\,dy)=0.$$

Donc, si Z n'est pas nul, on aura

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

c'est-à-dire p et q seront les dérivées partielles de z, qui satisfera par conséquent à l'équation proposée.

Quand Z sera nul, on pourra reconnaître directement si p, q sont les dérivées de z. Nous aurons, du reste, à revenir sur ce sujet.

§ 13. D'UN FAIT PARADOXAL QUI SE PRÉSENTE DANS LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

Tout ce que nous avons dit jusqu'ici de l'intégrale singulière s'applique seulement aux équations aux dérivées partielles *admettant au moins une intégrale complète à laquelle on puisse appliquer, dans toute leur étendue, les principes de la théorie des enveloppes.* Étant donnée une équation aux dérivées partielles quelconque, admet-elle une intégrale complète de ce genre? Monge regarde ce point comme absolument évident et ne juge pas même nécessaire de l'énoncer. La notion de l'intégrale complète joue d'ailleurs un rôle fondamental dans la méthode de Jacobi. Il semble donc, à un examen un peu superficiel, que, pour une équation aux dérivées partielles, il y aura, en général, une solution singulière donnée par le système des équations

$$(76) \qquad F = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0,$$

qui entraînent, comme nous l'avons vu, les deux suivantes

$$(77) \qquad X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0.$$

Or un tel résultat est paradoxal. Car, bien que les équations (76), (77) ne soient pas absolument indépendantes, qu'elles soient formées au moyen des dérivées d'une même fonction, il est facile de reconnaître qu'elles ne sont pas généralement vérifiées en prenant pour z, p, q des fonctions de x et de y. Voici une manière très simple de le montrer.

Soit l'équation proposée

$$(78) \qquad F(x, y, z, p, q) = a,$$

où a est une constante. De cette équation et des deux suivantes

$$(79) \qquad \frac{\partial F}{\partial p} = P = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q = 0,$$

tirons z, p, q en fonction de x, y, a, et substituons dans les deux suivantes

$$X + pZ = 0, \quad Y + qZ = 0.$$

S'il est vrai que les équations (76), (77) soient toujours compatibles, on aura identiquement

$$(80) \qquad X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0.$$

Cela posé, changeons a en une fonction de x, y, z, absolument quelconque. Alors les équations (78), (79) conserveront la même forme et donneront les mêmes valeurs de z, p, q en x, y, a. Mais les équations (80) deviendront

$$X + pZ = \frac{\partial a}{\partial x} + p\frac{\partial a}{\partial z}, \qquad Y + qZ = \frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{a}{\partial z}.$$

Or, d'après ce que nous avons dit, la substitution des valeurs de z, p, q doit annuler leurs premiers membres. On aurait donc

$$0 = \frac{\partial a}{\partial x} + p\frac{\partial a}{\partial z}, \qquad 0 = \frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial a}{\partial z},$$

quelle que soit la fonction a; résultat évidemment absurde.

Ainsi *le procédé qui devrait conduire à l'intégrale singulière, appliqué à une équation aux dérivées partielles quelconque, ne peut généralement fournir aucune solution.*

Étant donnée une équation aux dérivées partielles quelconque, il n'existe pas d'une manière normale d'intégrale singulière.

Quelle est la conclusion à tirer de ce résultat? Est-il nécessaire d'abandonner la notion de l'intégrale complète, de ne la conserver que pour une classe particulière d'équations? Évidemment non. Mais le résultat précédent prouve que les intégrales complètes des équations aux dérivées partielles quelconques, intégrales dont nous démontrerons l'existence, ne sont pas finies et continues dans une étendue assez grande pour qu'il y ait lieu de chercher leur enveloppe. Nous verrons que chaque intégrale cesse de définir une fonction continue de x et de y dans le voisinage des points pour lesquels on a

$$P = 0, \qquad Q = 0,$$

et que, par conséquent, il n'y a pas lieu de chercher une enve-

loppe. On voit que, si la théorie des solutions singulières avait été étudiée d'abord à ce point de vue, elle aurait pu mettre sur la voie de notions importantes sur la nature des intégrales des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Nous reconnaissons en même temps que la question des solutions singulières, pour être convenablement traitée, exige une étude approfondie des différentes intégrales d'une équation aux dérivées partielles quelconques, de leurs points singuliers, des régions où elles ont des lignes multiples, etc. Nous aurons à refaire, en partant de l'équation aux dérivées partielles, le travail que nous avions entrepris en prenant pour point de départ l'intégrale complète. Mais avant de commencer cette nouvelle étude, nous dirons encore quelques mots sur les équations formées par l'élimination des constantes, sur l'ordre de contact des intégrales singulières et des autres intégrales, et sur les solutions singulières des équations linéaires.

§ 14. DE L'ORDRE DU CONTACT QUE CHAQUE SURFACE INTÉGRALE PRÉSENTE AVEC L'INTÉGRALE SINGULIÈRE AU POINT OÙ ELLE LA TOUCHE.

Reprenons l'équation

$$V(x, y, z, a, b) = 0,$$

et supposons que l'élimination de a et de b entre cette équation et les suivantes

$$\frac{\partial V}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

conduise à une intégrale singulière bien définie.

Dans une étendue suffisamment petite de cette surface intégrale singulière, z sera une fonction bien définie de x et de y

$$z = f(x, y).$$

En substituant dans l'équation

$$V(x, y, z, a, b) = 0$$

à la place de z

$$z = f(x, y) + z_1,$$

les dérivées par rapport à a et à b ne seront pas changées et la solution singulière nouvelle sera le plan

$$z_1 = 0.$$

Ainsi, par une transformation, toujours légitime dans une étendue suffisamment petite des valeurs de x et de y, on peut toujours ramener la solution singulière à être le plan des xy. Quant à l'ordre de contact de deux surfaces quelconques, comme il ne dépend que de la différence des z des deux surfaces pour les mêmes valeurs de x et de y, il ne sera pas altéré par cette transformation. Remarquons enfin que les dérivées par rapport à a et à b jusqu'à un ordre quelconque seront encore les mêmes après la transformation.

En chaque point du plan des xy, solution singulière, a et b sont des fonctions, déterminées en général, de x et de y. Remarquons même que ces fonctions seront nécessairement distinctes, car, si l'on avait $b = f(a)$, les intégrales complètes pour lesquelles cette relation ne serait pas satisfaite cesseraient d'être tangentes à la solution singulière.

Cela posé, en tout point du plan des xy, on a

$$(81) \qquad \frac{\partial V}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Mais $\frac{\partial V}{\partial z}$ sera différent de zéro; autrement les intégrales complètes auraient des points multiples à leur contact avec l'intégrale singulière. Les quatre équations étant satisfaites en tous les points du plan des x, y, on aura en les différentiant

$$(82) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} da + \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial b} db + \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial x} dx + \frac{d^2 V}{\partial a\, \partial y} dy = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial b} da + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2} db + \frac{\partial^2 V}{\partial b\, \partial x} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial b\, \partial y} dy = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial x} da + \frac{\partial^2 V}{\partial b\, \partial x} db + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} dy = 0, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial a\, \partial y} da + \frac{\partial^2 V}{\partial b\, \partial y} db + \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} dx + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy = 0; \end{cases}$$

da, db se rapportent dans ces formules aux accroissements que prennent a et b *quand on se déplace sur l'intégrale singulière*. Comme dx, dy sont arbitraires, les relations précédentes doivent se réduire au plus à deux équations distinctes, ce qui entraîne entre les dérivées secondes des relations qu'il est inutile d'écrire et qui sont vérifiées pour tous les points du plan des xy.

Cela posé, considérons une intégrale quelconque définie par les équations

$$(83)\qquad \begin{cases} V(x, y, z, a, b) = 0, \\ b = f(a), \quad b' = f'(a), \\ \dfrac{\partial V}{\partial a} + b' \dfrac{\partial V}{\partial b} = 0. \end{cases}$$

Le calcul de d^2z ne présente aucune difficulté, et en effectuant ce calcul pour les points de contact avec l'intégrale singulière, on trouve

$$(84)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial z} d^2z = \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx^2 + 2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} dx\, dy + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy^2 \\ \qquad - \dfrac{\left[\dfrac{\partial V}{\partial a \partial x} dx + \dfrac{\partial^2 V}{\partial a \partial y} dy + b' \left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial b \partial x} dx + \dfrac{\partial^2 V}{\partial b \partial y} dy \right) \right]^2}{\dfrac{\partial^2 V}{\partial a^2} + 2 b' \dfrac{\partial^2 V}{\partial a \partial b} + b'^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial b^2}}, \end{cases}$$

expression qu'il serait facile de mettre sous la forme d'un carré parfait.

S'il existait une intégrale ayant avec la solution singulière un contact du second ordre, d^2z serait identiquement nul. Il faudrait donc que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy^2$$

fût un carré parfait. Ce qui n'a pas lieu, en général. Donc, dans le cas général, *aucune intégrale n'aura avec la solution singulière un contact du second ordre.*

Supposons maintenant que l'on ait, en tous les points du plan des xy,

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Cette relation, en vertu des formules (82), en entraîne un grand nombre d'autres. On peut la remplacer par le système

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = k\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = k\frac{\partial^2 V}{\partial y^2},$$

k étant une inconnue auxiliaire.

Cela posé, reportons-nous aux équations (82) qui définissent les variations de a et de b sur l'intégrale singulière, et ajoutons les deux dernières, après avoir multiplié la dernière par $-k$. On aura

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial x} - k\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y}\right) da + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x} - k\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial y}\right) db = 0,$$

et comme a et b sont des fonctions indépendantes, da, db étant arbitraires, on aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial x} - k\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x} - k\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial y} = 0, \tag{85}$$

ou, en introduisant une autre arbitraire λ,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial x} = \lambda\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y} = \lambda\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial y}. \tag{86}$$

Ajoutons maintenant les deux premières équations, après avoir multiplié la seconde par $-\lambda$, nous aurons

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} - \lambda\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\right) da + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b} - \lambda\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}\right) db = 0,$$

ce qui donne, pour la même raison que précédemment,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a^2} = \lambda\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b} = \lambda\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}. \tag{87}$$

Enfin, la seconde et la quatrième équation donnent, en y faisant $dy = -k\,dx$,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\,da + \frac{\partial^2 V}{\partial b^2}\,db = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y}\,da + \frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial y}\,db = 0;$$

da et db ne peuvent être nuls ensemble, car, sans cela, lorsqu'on se

déplacerait dans le plan des xy sur les courbes définies par l'équation différentielle

$$dy = -k\,dx,$$

a et b demeureraient constants, et par conséquent sur la solution singulière a serait fonction de b, et cette hypothèse a été écartée. On déduit donc des deux formules précédentes

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y} = h\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial y} = h\frac{\partial^2 V}{\partial b^2}. \tag{88}$$

En continuant l'application de la méthode précédente, on trouvera de même

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x},$$

et l'on s'assurera aisément que, généralement, les coefficients de da, db, dx, dy, dans deux quelconques des équations (82), sont proportionnels

Ainsi la seule équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 0$$

entraîne toutes celles que nous venons d'établir et celles qu'on obtiendrait en éliminant h, k, λ entre les équations (85), (86), (87), (88). Remarquons, parmi ces équations, la suivante

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial b}\right)^2 - \frac{\partial^2 V}{\partial a^2}\frac{\partial^2 V}{\partial b^2} = 0, \tag{89}$$

qui, réciproquement, étant admise, entraînerait toutes les autres. C'est cette équation qui caractérise le cas actuel, car elle aura lieu avant la transformation qui remplace la solution singulière par le plan des xy, transformation qui, nous l'avons vu, ne change pas les dérivées par rapport à a et à b.

Ces équations étant établies, si l'on s'en sert pour éliminer autant de dérivées que possible de l'expression de d^2z, on trouve

$$d^2z = 0.$$

Ainsi, *toutes les intégrales générales ont avec l'intégrale singulière un contact du second ordre.*

Voyons maintenant l'intégrale complète. On a pour elle

$$\frac{\partial V}{\partial z}\,d^2z = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,dx^2 - 2\,\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy - \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,dy^2;$$

d^2z sera un carré parfait et, par conséquent, l'intégrale complète sera *osculatrice* à l'intégrale singulière. (Nous disons que deux surfaces tangentes en un point A y sont osculatrices quand elles se coupent suivant une courbe dont les deux tangentes en A au point de contact se confondent.) Ainsi :

Quand la distribution des intégrales complètes est telle qu'elles touchent chacune l'intégrale singulière en un nombre limité de points, si elles ne sont pas osculatrices à l'intégrale singulière, il n'y aura aucune intégrale ayant un contact du second ordre avec la solution singulière.

Au contraire, si les intégrales complètes sont osculatrices à l'intégrale singulière, toutes les intégrales générales auront avec l'intégrale singulière un contact du second ordre.

Nous pouvons ajouter qu'en vertu de ce qui a été dit au paragraphe 10, lorsqu'il y aura osculation, toutes les caractéristiques, en nombre infini, partant d'un point de l'intégrale singulière, y auront la même tangente. C'est du reste ce que l'on vérifie aisément. Soient

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a} + b'\frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

les équations d'une caractéristique, sa tangente sera déterminée par les équations

$$dV = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial x}\,dx + \frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y}\,dy + b'\left(\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial x}\,dx + \frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial y}\,dy\right) = 0,$$

qui, en tenant compte des formules (85), prennent la forme

$$dz = 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a\,\partial y} + b'\frac{\partial^2 V}{\partial b\,\partial y}\right)(dy + k\,dx) = 0.$$

On voit que la tangente sera indépendante de b' et la même pour toutes les caractéristiques.

Ces résultats trouvent une confirmation remarquable dans l'étude des sphères osculatrices à une surface. On sait que ces sphères sont celles qui ont leurs centres aux centres de courbure principaux. Considérons, par exemple, celles dont les centres sont sur une des nappes (Σ) de la surface des centres de courbure. Soit (S) une sphère tangente en M à la surface et ayant pour ligne d'osculation la tangente Mt à l'une des deux lignes de courbure passant en M. L'axe radical de (S) et des sphères infiniment voisines sera cette tangente Mt. L'intersection de (S) et d'une sphère infiniment voisine sera donc un cercle dont le plan passera par Mt. Ce cercle sera évidemment osculateur à la section de la surface déterminée par son plan. Les caractéristiques sont donc ici les cercles osculateurs des sections tangentes aux lignes de courbure d'un système déterminé. On voit bien d'abord que toutes les caractéristiques passant en un point de l'intégrale singulière y ont la même tangente.

Considérons, en second lieu, l'intégrale générale enveloppe des sphères tangentes à la surface proposée en tous les points d'une courbe (C). Il est facile de reconnaître qu'il y aura contact du second ordre entre cette intégrale et l'intégrale singulière, puisque les deux surfaces sont tangentes en tous les points de la courbe (C) et, qu'en chaque point leurs sections planes, menées par la tangente Mt à la ligne de courbure, auront même cercle osculateur.

Nous étendrons les résultats de cet article au cas de n variables par un calcul plus élégant, et nous indiquerons comment on reconnaît les propriétés signalées plus haut, en partant de l'équation aux dérivées partielles et sans connaître l'intégrale complète. Ajoutons que la méthode précédente s'applique à l'étude du contact d'un ordre quelconque.

§ 15. DES INTÉGRALES SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

Les équations linéaires admettent encore des intégrales complètes. Par exemple, pour l'équation aux dérivées partielles des cylindres parallèles à l'axe des z, l'intégrale complète serait un cylindre quelconque renfermant dans son équation deux variables indépendantes. Mais les raisonnements qui précèdent reposant sur la notion un peu vague de continuité et d'enveloppe, on pourrait craindre à bon droit que, dans ce cas, ils ne soient en défaut. Quelques mots nous suffiront pour établir directement l'existence de la solution singulière.

Soient

$$(90)\qquad \begin{cases} f(x,y,z,a,b)=0, \\ \varphi(x,y,z,a,b)=0, \end{cases}$$

les équations d'un système de courbes dépendant de deux paramètres. Si l'on veut que l'une des courbes du système passe par un point M, a et b seront, en général, déterminés. La condition que le plan tangent en M à une surface soit tangent à l'une des courbes qui y passent conduira à une équation aux dérivées partielles qui sera linéaire, ou plutôt qui se décomposera en équations linéaires. Je ne m'arrête pas à démontrer que l'intégrale générale sera formée des courbes pour lesquelles b sera une fonction de a. J'arrive à des propriétés de ces intégrales et à la recherche de l'intégrale singulière.

Soit une intégrale définie par les équations

$$\begin{aligned} &f(x,y,z,a,b)=0, \qquad && b=\psi(a) \\ &\varphi(x,y,z,a,b)=0, \qquad && b'=\psi'(a). \end{aligned}$$

Le plan tangent en un point sera déterminé par les équations

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=-\left(\frac{\partial f}{\partial a}+b'\frac{\partial f}{\partial b}\right)da, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz=-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a}+b'\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right)da, \end{aligned}$$

ou, en éliminant da,

$$(91)\qquad \frac{\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz}{\frac{\partial \varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial \varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial \varphi}{\partial z}dz}=\frac{\frac{\partial f}{\partial a}+b'\frac{\partial f}{\partial b}}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}+b'\frac{\partial \varphi}{\partial b}}.$$

La forme de cette équation donne lieu à une propriété très curieuse.

Considérons quatre surfaces intégrales passant par la même courbe. Dans l'équation précédente, pour chaque point de cette courbe, b' variera seule quand on passera d'une surface à une autre. Or la forme de l'équation nous indique que le rapport anharmonique des plans tangents aux quatre intégrales est égal à celui des quatre valeurs de b' et, par conséquent, constant en tous les points de la courbe commune. Ainsi :

Si l'on considère toutes les surfaces engendrées par des courbes à deux paramètres, pour quatre de ces surfaces contenant la même courbe le rapport anharmonique des quatre plans tangents est le même en tous les points de la courbe.

Mais revenons à l'équation qui définit le plan tangent. Pour les points de chaque courbe tels que l'on ait

$$(92)\qquad \frac{\partial f}{\partial a} : \frac{\partial \varphi}{\partial a} :: \frac{\partial f}{\partial b} : \frac{\partial \varphi}{\partial b},$$

le plan tangent sera indépendant de b' et, par conséquent, le même pour toutes les surfaces.

Considérons, par exemple, les courbes planes d'ordre m pour lesquelles f sera du degré m, φ du premier degré. Les trois équations (90), (92) définissent sur chaque courbe $m(m+1)$ points. En ces points, toutes les surfaces intégrales seront tangentes les unes aux autres. C'est ainsi que, si les courbes sont des droites, les surfaces réglées correspondantes seront tangentes en deux points; si ce sont des coniques, toutes les surfaces passant par une conique seront tangentes en six points, etc.

Si entre les équations (90), (92), on élimine a et b, on obtient

une surface (Σ) que nous appellerons *surface focale du système de courbes*. Je vais démontrer qu'elle est la solution singulière.

En effet, écrivons le système (90), (92) sous la forme

$$(93)\quad f=0,\quad \varphi=0,\quad \frac{\partial f}{\partial a}-k\frac{\partial \varphi}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial b}-k\frac{\partial \varphi}{\partial b}=0.$$

En un point satisfaisant à ces équations, l'équation du plan tangent à une surface intégrale quelconque est donnée par la formule (91) et devient

$$(94)\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}-k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}-k\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)dy+\left(\frac{\partial f}{\partial z}-k\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)dz=0.$$

Quant à la surface focale, elle est définie par les équations (93), où a, b, k sont considérées comme des fonctions à éliminer de x, y, z. Or, si l'on différentie totalement l'équation

$$f-k\varphi=0,$$

combinaison des formules (93), les coefficients de da, db, dk sont nuls, et il reste l'équation (94), qui est donc aussi celle du plan tangent à la surface focale.

Cette surface focale, étant l'enveloppe de toutes les intégrales générales, satisfera à leur équation aux dérivées partielles. On peut aussi la considérer, si l'on veut, comme le lieu des intersections successives de deux courbes voisines du système. Toutes ces courbes lui sont tangentes en un nombre limité de points.

Par exemple, l'équation linéaire qui exprime que le plan tangent est normal à une surface fixe aura pour solution singulière la surface des centres de courbure.

On pourrait ajouter beaucoup de propriétés géométriques; je me contenterai des indications précédentes.

DEUXIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES ÉQUATIONS À UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES.

§ 16. PRÉLIMINAIRES ANALYTIQUES.

Après avoir traité le cas de l'équation aux dérivées partielles à deux variables indépendantes, il est indispensable d'aborder la même étude dans le cas d'un nombre quelconque de variables et de chercher à reconnaître quelles sont les différentes solutions d'une équation aux dérivées partielles, et quels sont les caractères distinctifs de la solution singulière. Nous commencerons encore en admettant, avec Lagrange et Jacobi, l'existence d'une intégrale complète, dont l'emploi nous conduira ensuite à la distinction des différentes classes de solutions. Il y a avantage à exposer cette théorie en employant un lemme donné récemment par MM. Lie et Mayer [1].

Lemme I. *Soient* $2n+1$ *fonctions* $Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n$ *de* $2n+1$ *variables indépendantes* $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, *dont les différentielles satisfont identiquement à la relation*

$$(1)\qquad dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_n\,dX_n = \rho\,(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n),$$

on aura

$$(2)\qquad (X_i X_k) = 0, \qquad (Z X_i) = 0,$$

$$(3)\qquad (P_i P_k) = 0, \qquad (P_k Z) = \rho P_k, \qquad (P_i X_k) = 0, \qquad (P_i X_i) = \rho,$$

en désignant par le symbole (UV) *l'expression*

$$(UV) = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial U}{\partial p_h}\left(\frac{\partial V}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{\partial V}{\partial p_h}\left(\frac{\partial U}{\partial x_h} + p_h \frac{\partial V}{\partial z}\right).$$

[1] Voir *Mathematische Annalen*, t. VIII, p. 215 et 304.

De plus ces $2n+1$ *fonctions seront indépendantes, en sorte que* z, x_i, p_k *pourront être exprimés en fonction de* Z, X_i, P_k.

Pour démontrer ce lemme et nous dispenser de différentiations assez longues, nous emploierons l'artifice de Cauchy, de Binet et de Jacobi, et nous désignerons par la caractéristique δ un second système de différentielles, que nous emploierons en même temps que le premier. On aura d'abord

$$(4)\quad \delta Z - P_1\,\delta X_1 - \ldots - P_n\,\delta X_n = \rho\,(\delta z - p_1\,\delta x_1 - \ldots - p_n\,\delta x_n).$$

Si nous différentions maintenant cette équation dans le premier système d'accroissements, nous trouverons

$$\begin{aligned} d\delta Z - P_1\,d\delta X_1 - \ldots - P_n\,d\delta X_n - dP_1\,\delta X_1 - \ldots - dP_n\,\delta X_n = \\ d\rho\,(\delta z - p_1\,\delta x_1 - \ldots - p_n\,\delta x_n) + \rho\,(d\delta z - p_1\,d\delta x_1 - \ldots - p_n\,d\delta x_n) \\ - \rho\,(dp_1\,\delta x_1 + \ldots + dp_n\,\delta x_n). \end{aligned}$$

Échangeons, dans cette équation, les d et les δ, et retranchons l'équation ainsi obtenue de la précédente, nous trouverons

$$\begin{aligned} dP_1\,\delta X_1 - dX_1\,\delta P_1 + \ldots + dP_n\,\delta X_n - dX_n\,\delta P_n \\ = \delta\rho\,(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n) \\ - d\rho\,(\delta z - p_1\,\delta x_1 - \ldots - p_n\,\delta x_n) \\ + \rho\,(dp_1\,\delta x_1 - dx_1\,\delta p_1 + \ldots + dp_n\,\delta x_n - dx_n\,\delta p_n). \end{aligned}$$

Supposons que dans les deux systèmes d'accroissements les différentielles de z soient telles que l'on ait

$$(5)\qquad \begin{cases} dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n \\ \delta z = p_1\,\delta x_1 + \ldots + p_n\,\delta x_n. \end{cases}$$

L'équation précédente se réduira à la suivante

$$\begin{aligned} (6)\qquad dP_1\,\delta X_1 - dX_1\,\delta P_1 + \ldots + dP_n\,\delta X_n - dX_n\,\delta P_n \\ = \rho\,(dp_1\,\delta x_1 - dx_1\,\delta p_1 + \ldots + dp_n\,\delta x_n - dx_n\,\delta p_n). \end{aligned}$$

Cela posé, les variables X_i, P_i étant fonctions de x_i, p_k, z, cher-

chons leurs différentielles, en tenant compte de l'expression (5) de dz. Nous trouverons

$$(7)\quad \begin{cases} d\mathrm{P}_i = \dfrac{d\mathrm{P}_i}{dx_1}dx_1 + \cdots + \dfrac{d\mathrm{P}_i}{dx_n}dx_n + \dfrac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial p_1}dp_1 + \cdots + \dfrac{\partial \mathrm{P}_i}{\partial p_n}dp_n \\ d\mathrm{X}_i = \dfrac{d\mathrm{X}_i}{dx_1}dx_1 + \cdots + \dfrac{d\mathrm{X}_i}{dx_n}dx_n + \dfrac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial p_1}dp_1 + \cdots + \dfrac{\partial \mathrm{X}_i}{\partial p_n}dp_n. \end{cases}$$

Nous avons posé pour abréger, dans ces formules,

$$\frac{d}{dx_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial}{\partial z},$$

$\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\frac{\partial}{\partial p_i}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ désignant les dérivées partielles ordinaires, et nous conserverons toujours dans la suite cette notation. Si nous portons ces valeurs de $d\mathrm{P}_i$, $d\mathrm{X}_i$ dans l'identité (6) et que nous égalions dans les deux membres les coefficients de dx_i, dp_k, nous obtiendrons les nouvelles formules

$$(8)\quad \begin{cases} -\rho\,\delta p_i = \dfrac{d\mathrm{P}_1}{dx_i}\delta \mathrm{X}_1 - \dfrac{d\mathrm{X}_1}{dx_i}\delta \mathrm{P}_1 + \cdots + \dfrac{d\mathrm{P}_n}{dx_i}\delta \mathrm{X}_n - \dfrac{d\mathrm{X}_n}{dx_i}\delta \mathrm{P}_n \\ \rho\,\delta x_i = \dfrac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial p_i}\delta \mathrm{X}_1 - \dfrac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial p_i}\delta \mathrm{P}_1 + \cdots + \dfrac{\partial \mathrm{P}_n}{\partial p_i}\delta \mathrm{X}_n - \dfrac{\partial \mathrm{P}_n}{\partial p_i}\delta \mathrm{P}_n. \end{cases}$$

Cela posé, dans les formules (8) remplaçons δ par d et substituons les valeurs ainsi obtenues de dp_i, dx_k dans les seconds membres des formules (7).

Nous aurons

$$(9)\quad \begin{cases} \rho\, d\mathrm{P}_i = (\mathrm{P}_1 \mathrm{P}_i)\, d\mathrm{X}_1 + \ldots + (\mathrm{P}_n \mathrm{P}_i)\, d\mathrm{X}_n - (\mathrm{X}_1 \mathrm{P}_i)\, d\mathrm{P}_1 - \ldots \\ \qquad\qquad - (\mathrm{X}_n \mathrm{P}_i)\, d\mathrm{P}_n \\ \rho\, d\mathrm{X}_k = (\mathrm{P}_1 \mathrm{X}_k)\, d\mathrm{X}_1 + \ldots + (\mathrm{P}_n \mathrm{X}_k)\, d\mathrm{X}_n - (\mathrm{X}_1 \mathrm{X}_k)\, d\mathrm{P}_1 - \ldots \\ \qquad\qquad - (\mathrm{X}_n \mathrm{X}_k)\, d\mathrm{P}_n. \end{cases}$$

En général, u étant une fonction quelconque, on aurait

$$(10)\quad \begin{cases} \rho\, du = (\mathrm{P}_1 u)\, d\mathrm{X}_1 + \ldots + (\mathrm{P}_n u)\, d\mathrm{X}_n - (\mathrm{X}_1 u)\, d\mathrm{P}_1 - \ldots \\ \qquad\qquad - (\mathrm{X}_n u)\, d\mathrm{P}_n. \end{cases}$$

Or il est clair que les différentielles $d\mathrm{X}_i$, $d\mathrm{P}_k$ sont indépen-

dantes comme dp_i, dx_k, puisqu'à tout système de valeurs de $d\mathrm{X}_i$, $d\mathrm{P}_k$, correspondra par les formules (8) un système de valeurs de dp_i, dx_k. Il faut donc que les relations (9) soient identiquement vérifiées, ce qui exige que l'on ait

$$(11)\quad (\mathrm{P}_i\mathrm{P}_k)=0,\qquad (\mathrm{P}_i\mathrm{X}_i)=\rho,\qquad (\mathrm{P}_i\mathrm{X}_k)=0,\qquad (\mathrm{X}_i\mathrm{X}_k)=0.$$

C'est là une partie des relations que nous avions à démontrer. Les autres s'en déduiront facilement. L'identité (10) nous donne, en effet,

$$(12)\quad \begin{cases} \rho\, d\mathrm{Z}=(\mathrm{P}_1\mathrm{Z})\,d\mathrm{X}_1+\ldots+(\mathrm{P}_n\mathrm{Z})\,d\mathrm{X}_n-(\mathrm{X}_1\mathrm{Z})\,d\mathrm{P}_1-\ldots \\ \qquad\qquad -(\mathrm{X}_n\mathrm{Z})\,d\mathrm{P}_n, \end{cases}$$

et comme, dans le système d'accroissements choisi, on a

$$dz=p_1\,dx_1+\ldots+p_n\,dx_n,$$

l'identité (1) entraîne la relation

$$d\mathrm{Z}=\mathrm{P}_1\,d\mathrm{X}_1+\ldots+\mathrm{P}_n\,d\mathrm{X}_n.$$

La comparaison de cette formule et de l'équation (12) nous conduit aux équations

$$(13)\quad (\mathrm{P}_i\mathrm{Z})=\rho\,\mathrm{P}_i,\qquad (\mathrm{Z}\,\mathrm{X}_i)=0,$$

qui complètent le système des relations que nous avions à démontrer.

Je dis maintenant que les fonctions Z, X_i, P_k sont indépendantes; et pour cela je vais calculer leur déterminant fonctionnel. Mais auparavant je remarquerai que l'identité (1) est évidemment équivalente aux $2n+1$ équations suivantes

$$(14)\quad \frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial z}-\mathrm{P}_1\frac{\partial\mathrm{X}_1}{\partial z}-\ldots-\mathrm{P}_n\frac{\partial\mathrm{X}_n}{\partial z}=\rho$$

$$(15)\quad \frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial x_i}-\mathrm{P}_1\frac{\partial\mathrm{X}_1}{\partial x_i}-\ldots-\mathrm{P}_n\frac{\partial\mathrm{X}_n}{\partial x_i}=-\rho p_i$$

$$(16)\quad \frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial p_i}-\mathrm{P}_1\frac{\partial\mathrm{X}_1}{\partial p_i}-\ldots-\mathrm{P}_n\frac{\partial\mathrm{X}_n}{\partial p_i}=0,$$

qui donnent, en ajoutant à la seconde la première multipliée par p_i,

$$\frac{dZ}{dx_i} - P_1 \frac{dX_1}{dx_i} - \cdots - P_n \frac{dX_n}{dx_i} = 0. \tag{17}$$

Cela posé, soit

$$\Delta = \frac{d(Z, X_1, \cdots, X_n, P_1, \cdots, P_n)}{d(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n)}$$

le déterminant fonctionnel. Ajoutons à chacune des lignes qui contiennent les dérivées par rapport à x_i celle qui contient les dérivées par rapport à z, multipliée par p_i, Δ prendra la forme

$$\Delta = \sum \pm \frac{\partial Z}{\partial z} \frac{dX_1}{dx_1} \cdots \frac{dX_n}{dx_n} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial p_n}.$$

Si maintenant nous retranchons de la ligne qui contient les dérivées de Z celles qui contiennent les dérivées de $X_1, \ldots, X_n$, multipliées respectivement par $P_1, \ldots, P_n$, nous trouverons, en vertu des formules (14), (16), (17),

$$\Delta = \rho \Delta',$$

où

$$\Delta' = \sum \pm \frac{dX_1}{dx_1} \cdots \frac{dX_n}{dx_n} \frac{\partial P_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial P_n}{\partial p_n}.$$

Or ce déterminant Δ' n'est pas autre chose que celui des formules (7), considérées comme déterminant les inconnues dx_i, dp_k, et comme ces équations ne sont jamais impossibles, puisqu'elles sont vérifiées par les valeurs déduites des formules (8), où l'on remplacerait par d la caractéristique δ, nous voyons que Δ' ne sera pas nul.

On peut même calculer le déterminant Δ'. En effet, les équations (7) devenant identiques par la substitution des valeurs de dp_i, dx_k déduites des formules (8), le produit des déterminants des deux systèmes de formules doit être égal à l'unité. Or le déterminant du système (7) est Δ', celui du système (8), composé des mêmes éléments divisés par ρ, est $\frac{\Delta'}{\rho^{2n}}$. On a donc

$$\frac{\Delta'^2}{\rho^{2n}} = 1, \qquad \Delta' = \rho^n.$$

et, par conséquent,

$$(18) \qquad \Delta = \frac{d(Z, X_1, \ldots, X_n, P_1, \ldots, P_n)}{d(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)} = \rho^{n+1},$$

ce qui achève notre démonstration.

Lemme II. *Réciproquement, si l'on connaît* $n+1$ *fonctions indépendantes,* $Z, X_1, \ldots, X_n$ *des variables* z, x_i, p_k, *satisfaisant aux équations*

$$(Z X_i) = 0, \qquad (X_i X_k) = 0,$$

on pourra toujours trouver, et d'une seule manière, n *fonctions* $P_1, \ldots, P_n$ *telles que l'on ait*

$$dZ - P_1\, dX_1 - \ldots - P_n\, dX_n = \rho\,(dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n).$$

Supposons, en effet, que les $n+1$ fonctions Z, X_i satisfassent aux relations indiquées. Les n fonctions $P_1, \ldots, P_n$ devront satisfaire aux équations (16), (17), au nombre de $2n$. On démontre que ces équations sont compatibles et qu'elles donnent toujours des fonctions satisfaisant à l'identité (1). Mais pour ce point nous renverrons au mémoire de M. Mayer (*Mathematische Annalen*, t. VIII), tout en faisant remarquer que la condition indiquée par cet habile géomètre, à savoir que l'une au moins des fonctions Z, X_i contienne z, nous paraît devoir être toujours satisfaite d'elle-même.

Les formules (7) et (8) conduisent à certaines relations très importantes dans la théorie de la variation des constantes, et que nous ne ferons qu'indiquer ici. Considérons z, x_i, p_k comme fonctions de Z, X_i, P_k.

Les formules (8) seront équivalentes aux suivantes

$$(19) \qquad \begin{cases} -\rho \dfrac{dp_i}{dX_k} = \dfrac{dP_k}{dx_i}, & \rho \dfrac{\partial p_i}{\partial P_k} = \dfrac{dX_k}{dx_i} \\ \rho \dfrac{dx_i}{dX_k} = \dfrac{\partial P_k}{\partial p_i}, & -\rho \dfrac{\partial x_i}{\partial P_k} = \dfrac{\partial X_k}{\partial p_i} \end{cases}$$

où le symbole $\frac{d}{dX_k}$ a la signification

$$\frac{d}{dX_k} = \frac{\partial}{\partial X_k} + P_k \frac{\partial}{\partial Z}.$$

Une remarque plus importante est la suivante :

Supposons qu'il s'agisse d'intégrer l'équation linéaire

$$(\mathrm{X}_i u) = 0,$$

nous aurons les $2n$ solutions

$$\mathrm{Z}, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_{i-1}, \mathrm{P}_{i+1}, \ldots, \mathrm{P}_n,$$

et comme ces fonctions sont indépendantes, nous obtiendrons ainsi toutes les intégrales distinctes de cette équation.

On verra de même que les intégrales de l'équation

$$(\mathrm{Z}\, u) = 0$$

sont

$$\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Z}, \frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_i}, \ldots, \frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{P}_i}.$$

Nous aurons à faire usage de ces résultats.

Après avoir donné des propriétés des fonctions satisfaisant à l'identité

$$dz - \mathrm{P}_1\, d\mathrm{X}_1 - \ldots - \mathrm{P}_n\, d\mathrm{X}_n = \rho\,(dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n),$$

proposons-nous de résoudre cette identité, c'est-à-dire de trouver toutes les fonctions qui peuvent y satisfaire. Sous une forme différente, ce problème a été résolu par Jacobi.

Puisqu'il y a une relation linéaire entre les différentielles de Z, $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, z, x_1, \ldots, x_n$, il faut nécessairement que ces $2n+2$ variables soient liées par une ou plusieurs équations. Écrivons toutes celles de ces relations qui existent et qui sont distinctes, et soient

$$(20)\quad \psi_1(\mathrm{Z}, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, z, x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \psi_2 = 0, \ldots, \psi_h = 0,$$

ces relations. On aura

$$d\psi_1 = 0, \qquad d\psi_2 = 0, \ldots, d\psi_h = 0,$$

et l'identité

$$d\mathrm{Z} - \mathrm{P}_1\, d\mathrm{X}_1 - \ldots - \mathrm{P}_n\, d\mathrm{X}_n = \rho\,(dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n)$$

ne peut être qu'une combinaison linéaire des relations précédentes. On doit donc avoir

$$(21)\quad \begin{cases} dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_n\,dX_n - \rho\,(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n) \\ \qquad = \lambda_1\,d\psi_1 + \ldots + \lambda_h\,d\psi_h, \end{cases}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ étant des arbitraires inconnues. Comme $\psi_1, \ldots, \psi_h$ sont nuls, on peut écrire

$$\lambda_1\,d\psi_1 + \ldots + \lambda_h\,d\psi_h = d\,(\lambda_1\,\psi_1 + \ldots + \lambda_h\,\psi_h) = d\pi$$

en posant

$$\pi = \lambda_1\,\psi_1 + \ldots + \lambda_h\,\psi_h.$$

En égalant les coefficients de chaque différentielle dans l'équation (21), on trouve le système suivant :

$$(22)\quad \begin{cases} \pi = \lambda_1\,\psi_1 + \ldots + \lambda_h\,\psi_h, \\ 1 = \dfrac{\partial\pi}{\partial Z}, \qquad P_i = -\dfrac{\partial\pi}{\partial X_i}, \\ -\rho = \dfrac{\partial\pi}{\partial z}, \qquad \rho p_i = \dfrac{\partial\pi}{\partial x_i}, \end{cases}$$

que l'on peut encore écrire

$$(23)\quad \begin{cases} \rho\left(\lambda_1\dfrac{\partial\psi_1}{\partial Z} + \ldots + \lambda_h\dfrac{\partial\psi_h}{\partial Z}\right) + \lambda_1\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_h\dfrac{\partial\psi_h}{\partial z} = 0, \\ P_i\left(\lambda_1\dfrac{\partial\psi_1}{\partial Z} + \ldots + \lambda_h\dfrac{\partial\psi_h}{\partial Z}\right) + \lambda_1\dfrac{\partial\psi_1}{\partial X_i} + \ldots + \lambda_h\dfrac{\partial\psi_h}{\partial X_i} = 0, \\ p_i\left(\lambda_1\dfrac{\partial\psi_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_h\dfrac{\partial\psi_h}{\partial z}\right) + \lambda_1\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_h\dfrac{\partial\psi_h}{\partial x_i} = 0. \end{cases}$$

Les dernières équations écrites

$$(24)\quad \left(\lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_h\frac{\partial\psi_h}{\partial z}\right)p_i + \lambda_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_h\frac{\partial\psi_h}{\partial x_i} = 0,$$

jointes aux équations (20)

$$\psi_1 = 0, \ \ldots, \ \psi_h = 0,$$

détermineront $Z, X_1, \ldots, X_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_h$ en fonction de z, x_i, p_k, et les autres équations (23) feront alors connaître $P_1, \ldots, P_n, \rho$.

Toutefois, il importe d'ajouter une remarque essentielle. Les fonctions $\psi_1, \ldots, \psi_h$ doivent être choisies de telle manière que le système des équations (20), (24), permette de déterminer $Z, X_1, \ldots, X_n$. Ce système ne sera jamais indéterminé, mais il pourrait se faire qu'il fût impossible et qu'il conduisît à un certain nombre de relations entre z, x_i, p_k, et alors la méthode se trouverait en défaut.

Le cas le plus important des formules précédentes, auquel on peut du reste ramener tous les autres, est celui où il n'y a qu'une seule équation

$$\psi(Z, X_1, \ldots, X_n, z, x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{25}$$

Alors les formules qui donnent la solution sont les suivantes :

$$\frac{\partial\psi}{\partial Z}p + \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial Z}P_i + \frac{\partial\psi}{\partial X_i} = 0,$$

et

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}p_i + \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = 0. \tag{26}$$

Ces dernières formules, jointes à l'équation (25), permettent de déterminer $Z, X_1, \ldots, X_n$. Mais il faut que la fonction ψ ne soit pas choisie de telle manière qu'on puisse éliminer $Z, X_1, \ldots, X_n$ entre les $n+1$ équations (25), (26), c'est-à-dire il faut qu'elle ne soit pas une intégrale complète à $n+1$ constantes d'une équation aux dérivées partielles ou d'un système d'équations aux dérivées partielles.

J'indiquerai, en terminant cet article, quelques propositions qui nous seront utiles.

Lemme III. *Toutes les fois qu'entre les différentielles de $2n+1$ variables z, x_i, p_k, on aura la relation*

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0,$$

il y aura au moins $n+1$ relations distinctes entre ces variables, et s'il n'y en a pas davantage, il suffira, pour les connaître toutes, d'avoir celles qui sont indépendantes de $p_1, \ldots, p_n$.

En effet, l'identité prouve qu'il y a entre $z, x_1, \ldots, x_n$ une ou plusieurs relations. Écrivons toutes celles qui existent et sont distinctes et dont l'une au moins contiendra évidemment z,

$$\begin{aligned} z &= \psi(x_k, \ldots, x_n), \\ x_1 &= \psi_1(x_k, \ldots, x_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{k-1} &= \psi_{k-1}(x_k, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

En substituant les valeurs des différentielles $dz, dx_1, \ldots, dx_{k-1}$ dans l'identité

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0, \tag{27}$$

il faudra que les coefficients de $dx_k, \ldots, dx_n$ soient nuls, ce qui donne

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - p_1\frac{\partial\psi_1}{\partial x_k} - \ldots - p_{k-1}\frac{\partial\psi_{k-1}}{\partial x_k} - p_k = 0, \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_{k+1}} - \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad - p_{k+1} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{\partial\psi}{\partial x_n} - \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad - p_n = 0. \end{aligned}$$

On voit que toutes les variables s'expriment en fonction de

$$p_1, \ldots, p_{k-1}, \qquad x_k, \ldots, x_n,$$

ce qui démontre la proposition.

Lemme IV. *Toutes les fois qu'entre les différentielles de* $2n$ *variables* a_i, b_i, *on a la relation*

$$b_1\,da_1 + \ldots + b_n\,da_n = 0, \tag{28}$$

ces $2n$ *arbitraires sont liées au moins par* n *équations distinctes.*

Cette proposition se démontre comme la précédente, à laquelle elle pourrait être ramenée.

§ 17. DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES À UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES.

Rappelons en quelques mots le point de départ de Lagrange et la notion de l'intégrale complète.

Soit

$$V(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0 \tag{29}$$

une équation entre $n+1$ variables $z, x_1, \ldots, x_n$ et n constantes, et supposons qu'entre cette équation et les suivantes

$$\frac{\partial V}{\partial z} p_1 + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial V}{\partial z} p_n + \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0, \tag{30}$$

qui déterminent les dérivées $p_1, \ldots, p_n$ de z, considérée comme fonction de $x_1, \ldots, x_n$, on élimine les constantes $a_1, \ldots, a_n$. En général, si la forme de la fonction V n'est pas particulière, on sera conduit à une seule équation

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0 \tag{31}$$

entre z, x_i, p_k. Lagrange a montré comment on peut intégrer cette équation.

Il est évident que l'on peut remplacer l'équation aux dérivées partielles par le système des équations (29), (30), pourvu que dans ce système on ne regarde plus $a_1, \ldots, a_n$ que comme des fonctions, déterminées de manière à satisfaire à ces équations. Ainsi toute solution de l'équation (31) pourra être remplacée par le système des équations (29), (30), où $a_1, \ldots, a_n$ seront considérées comme des fonctions inconnues.

Cela posé, différentions l'équation (29), en tenant compte des formules (30). Nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} da_1 + \cdots + \frac{\partial V}{\partial a_n} da_n = 0. \tag{31 bis}$$

Cette dernière équation admet plusieurs genres de solutions.

D'abord, si l'on suppose que $a_1, \ldots, a_n$ soient des fonctions indépendantes, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0. \tag{32}$$

Le résultat de l'élimination de $a_1, \ldots, a_n$ entre les équations (29), (32) donnera une première solution, la solution singulière.

En second lieu, on peut supposer qu'il existe une ou plusieurs relations entre $a_1, \ldots, a_n$ indépendantes de $x_1, \ldots, x_n$. Écrivons toutes celles qui sont distinctes :

$$f_1(a_1, \ldots, a_n) = 0, \ \ldots, f_k(a_1, \ldots, a_n) = 0. \tag{33}$$

La relation entre les différentielles $da_1, \ldots, da_n$ devra être identique à la combinaison

$$\lambda_1 df_1 + \ldots + \lambda_k df_k,$$

ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial a_1} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_n} = \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial a_n} + \ldots + \lambda_k \dfrac{\partial f_k}{\partial a_n}. \end{array} \right. \tag{34}$$

Si entre les équations (29), (33), (34), on élimine $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $a_1, \ldots, a_n$, on obtiendra encore une intégrale appelée *intégrale générale*, si $k < n$, et *intégrale complète*, si $a_1, \ldots, a_n$ sont liées par n équations, c'est-à-dire sont constantes. On voit que ce premier examen nous conduirait à distinguer n classes d'intégrales, suivant le nombre des relations établies entre les arbitraires $a_1, \ldots, a_n$. La solution singulière, classée à part, serait en quelque sorte le dernier terme de cette série.

On peut encore, dans le cas des intégrales générales, diriger le calcul de la manière suivante. Supposons que les équations (33)

soient résolues par rapport à quelques-unes des arbitraires a_i, par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_k$ par exemple, et soient

$$\begin{aligned} da_1 &= b_{11}\, da_{k+1} + \ldots + b_{1,n-k}\, da_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ da_k &= b_{k1}\, da_{k+1} + \ldots + b_{k,n-k}\, da_n. \end{aligned}$$

En portant ces valeurs de $da_1, \ldots, da_k$ dans l'équation (31 *bis*) et égalant à zéro les coefficients de $da_{k+1}, \ldots, da_n$, on aura les relations

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial a_1} b_{11} + \dfrac{\partial V}{\partial a_2} b_{21} + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial a_k} b_{k1} + \dfrac{\partial V}{\partial a_{k+1}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_1} b_{1,n-k} + \ldots \qquad + \dfrac{\partial V}{\partial a_k} b_{k,n-k} + \dfrac{\partial V}{\partial a_n} = 0, \end{cases}$$

qui détermineront $a_{k+1}, \ldots, a_n$ en fonction de $z, x_1, \ldots, x_n$ et qui donneront la solution complète du problème.

Ce procédé de Lagrange donne lieu à plusieurs remarques. D'abord il laisse de côté certaines intégrales complètes comme celles que nous avons rencontrées dans la théorie des équations linéaires, pour le cas de deux variables indépendantes. Dans ce cas, nous l'avons fait remarquer, on pourrait certainement trouver des intégrales complètes représentées par une seule équation; mais la véritable intégrale complète, ce sont les deux équations de la courbe qui engendre les intégrales. Cette remarque s'étend à un nombre quelconque de variables [1].

Supposons, par exemple, que l'on parte de h relations entre les variables $z, x_1, \ldots, x_n$ et n constantes $a_1, \ldots, a_n$

$$(36)\qquad \begin{cases} f_1(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0, \\ f_2(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_h(z, x_1, x_2, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0, \end{cases}$$

[1] Voir S. Lie : Zur Theorie der partieller Differentialgleichungen, insbesondere über eine classification derselben (*Nachrichten* de Goettingue, 1872, p. 480).

et que l'on détermine les dérivées de z par les relations

$$(37)\quad \left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\ldots+\lambda_h\frac{\partial f_h}{\partial z}\right)p_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\ldots+\lambda_h\frac{\partial f_h}{\partial x_i}=0.$$

En éliminant $a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_h$ entre les équations précédentes, on sera conduit en général à une seule relation

$$(38)\qquad F(z, x_i, p_k)=0,$$

qui sera une équation aux dérivées partielles, à laquelle satisfera z. Cette équation est précisément celle que l'on formerait par le procédé de Lagrange si les k équations (36) se réduisaient à une seule. Or on l'intègre encore par sa méthode.

Remarquons, en effet, que l'équation aux dérivées partielles peut être remplacée par le système (36), (37), où l'on regardera $a_1, \ldots, a_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_h$ comme des inconnues à déterminer. Or si l'on différentie totalement les équations (36) et que l'on forme la combinaison

$$\lambda_1 df_1+\ldots+\lambda_h df_h=0,$$

il reste l'équation

$$\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial a_1}+\ldots+\lambda_h\frac{\partial f_h}{\partial a_1}\right)da_1+\ldots+\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial a_n}+\ldots+\lambda_h\frac{\partial f_h}{\partial a_n}\right)da_n=0,$$

sur laquelle on peut faire les mêmes raisonnements que dans le cas examiné par Lagrange.

La solution singulière sera celle pour laquelle les coefficients de $da_1, \ldots, da_n$ seront nuls. Il y aura aussi des intégrales générales obtenues en établissant entre $a_1, \ldots, a_n$ une ou plusieurs relations.

Ce genre nouveau d'intégrales complètes défini par les formules (36) ne conduit qu'à une classe particulière d'équations aux dérivées partielles, nous allons le montrer, mais il n'en est pas moins intéressant.

D'abord, si les relations (36) sont au nombre de n, on pourra en déduire $a_1, \ldots, a_n$ en fonction de $z, x_1, \ldots, x_n$, et l'équation (38) deviendra linéaire; soient

$$a_1=\psi_1, \quad \ldots, \quad a_n=\psi_n,$$

les valeurs de $a_1, \ldots, a_n$. L'intégrale la plus générale sera alors :

$$f(\psi_1, \ldots, \psi_n) = 0.$$

Supposons maintenant que les relations (36) soient au nombre de h, h étant plus petit que n. Si on en tire $a_1, \ldots, a_h$ en fonction des autres arbitraires et de $x_1, \ldots, x_n, z$, et qu'on substitue dans les équations (37), en éliminant $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$, on aura $n-h+1$ équations linéaires en $p_1, \ldots, p_n$, entre lesquelles il faudra encore éliminer $a_{h+1}, \ldots, a_n$, si l'on veut avoir l'équation aux dérivées partielles cherchée.

Par exemple, si $h = n-1$, il reste deux équations linéaires qui admettront une intégrale commune avec $n-1$ arbitraires et qui contiendront une dernière constante, a_n par exemple, qu'il faudrait éliminer entre ces deux équations pour avoir l'équation aux dérivées partielles cherchée. Nous voyons qu'ici, au lieu des deux classes d'équations, qui se présentent dans le cas de deux variables indépendantes, les équations linéaires et les équations non linéaires, nous en aurons n. La première sera formée des équations linéaires, la $h^{\text{ième}}$ s'obtiendra en éliminant $h-1$ constantes entre h équations linéaires admettant une solution commune de la plus grande étendue possible, c'est-à-dire avec $n-h+1$ arbitraires.

L'intégrale complète (36), formée avec un nombre quelconque d'équations, comprenant celle de Lagrange comme cas particulier, c'est sur elle que nous raisonnerons. Mais auparavant nous allons faire une remarque qui nous sera très utile et qui lève les difficultés que présente, dans bien des cas, l'absence d'une constante arbitraire dans une équation aux dérivées partielles.

Si les équations (36) contiennent, en dehors des constantes a_i, une autre arbitraire a qui se retrouve dans l'équation aux dérivées partielles, nous l'adjoindrons aux a_i, en la mettant en évidence, mais en lui faisant jouer un rôle différent. S'il n'y a pas de telle constante, on peut facilement l'introduire, sans faire subir aucune modification sérieuse aux solutions.

Supposons que z figure dans l'équation aux dérivées partielles

et changeons z en $z+a$, nous aurons introduit l'arbitraire que nous cherchions. Si z n'entre pas dans l'équation, nous remplacerons l'une des variables x_i par x_i+a. Enfin, si aucune des variables x_i ne figurait dans l'équation, nous remplacerions z par $z+ax_i$, ce qui remplacerait p_i par p_i+a et introduirait encore la constante a. Dans la suite, quand nous aurons besoin de préciser, nous introduirons la constante a avec z et nous ne négligerons qu'en apparence les équations où z ne figure pas, puisqu'on peut toujours faire reparaître la fonction en prenant comme nouvelle variable dépendante une des variables indépendantes x_i qui figurent dans cette équation.

Cela posé, soient

$$(39)\qquad \begin{cases} f_1(z, x_1, \ldots, x_n, a, a_1, \ldots, a_n) = 0, \\ f_2(z, x_1, \ldots, x_n, a, a_1, \ldots, a_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_k(z, x_1, \ldots, x_n, a, a_1, \ldots, a_n) = 0, \end{cases}$$

les k équations qui nous servent de point de départ, et

$$(40)\qquad \left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\cdots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z}\right)p_i+\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\cdots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right)=0$$

les équations qui déterminent les quantités p_i. Notre hypothèse est que l'élimination des constantes $a_1, \ldots, a_n$ entre ces équations conduit à une seule relation entre les quantités z, x_i, p_k, *contenant* a. En d'autres termes, ces équations définissent $a, a_1, \ldots, a_n$ comme $n+1$ fonctions de z, x_i, p_k. Cela posé, nous ne considérerons plus $p_1, \ldots, p_n$ comme des dérivées, mais bien les $2n+1$ variables z, x_i, p_k comme *indépendantes* au même titre. Les équations (39), (40) définiront $n+1$ fonctions $a, a_1, \ldots, a_n$ de ces $2n+1$ variables indépendantes.

Introduisons les n fonctions nouvelles définies par les équations

$$(41)\qquad \left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial a}+\cdots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial a}\right)b_i+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial a_i}+\cdots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial a_i}=0,$$

et formons l'équation

$$\lambda_1\,df_1+\ldots+\lambda_k\,df_k=0.$$

Nous aurons, en tenant compte des formules (40), (41)

$$-\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z}\right)(dz-p_1\,dx_1-\ldots-p_n\,dx_n)$$
$$=\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial a}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial a}\right)(da-b_1\,da_1-\ldots-b_n\,da_n).$$

Si donc nous posons

$$(42)\qquad \rho\left(\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial a}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial a}\right)+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\ldots+\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z}=0,$$

nous aurons

$$(43)\qquad da-b_1\,da_1-\ldots-b_n\,da_n=\rho\,(dz-p_1\,dx_1-\ldots-p_n\,dx_n).$$

C'est l'équation étudiée dans les lemmes préliminaires. Du premier de ces lemmes nous concluons d'abord que les $2n+1$ fonctions $a, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ sont indépendantes, et que l'on peut exprimer z, x_i, p_k en fonction de a, a_i, b_k.

Jusqu'ici nous avons considéré z, x_i, p_k comme autant de variables indépendantes. Supposons maintenant que, regardant z comme une fonction des n variables x_i et $p_1, \ldots, p_n$ comme ses dérivées, on veuille intégrer l'équation

$$a=\text{constante},$$

on aura

$$da=0,\qquad dz=p_1\,dx_1+\ldots+p_n\,dx_n,$$

et l'identité (43) nous donnera

$$(44)\qquad b_1\,da_1+b_2\,da_2+\ldots+b_n\,da_n=0.$$

Or nous avons vu (lemme IV) que, pour satisfaire à cette équation, il faut établir n relations entre les $2n$ variables a_i, b_k, en sorte que n seulement de ces $2n$ variables peuvent être choisies arbitrairement.

On pourra d'abord poser

$$(45)\qquad b_1=0,\qquad b_2=0,\ \ldots,\ b_n=0.$$

En second lieu, si l'on suppose qu'il existe une seule relation entre $a_1, \ldots, a_n$,

$$(46)\qquad \begin{cases} a_1 = \psi(a_2, \ldots a_n), \\ b_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial a_2} + b_2 = 0, \ \ldots, \ b_1 \dfrac{\partial \psi}{\partial a_n} + b_n = 0. \end{cases}$$

En général, si l'on suppose qu'il existe $l-1$ relations entre $a_1, \ldots, a_n$, on aura

$$(47)\qquad \begin{cases} a_1 = \psi_1(a_l, \ldots, a_n), \\ a_2 = \psi_2(a_l, \ldots, a_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{l-1} = \psi_{l-1}(a_l, \ldots, a_n), \\ b_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial a_l} + \ldots + b_{l-1} \dfrac{\partial \psi_{l-1}}{\partial a_l} + b_l = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 \dfrac{\partial \psi_1}{\partial a_n} + \ldots + b_{l-1} \dfrac{\partial \psi_{l-1}}{\partial a_n} + b_n = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, supposons que l'équation (44) ait été résolue de l'une quelconque des manières précédentes qui laissent subsister n arbitraires indépendantes, et voyons si nous aurons une solution de l'équation aux dérivées partielles

$$a = \text{constante}.$$

Les $2n+1$ variables z, x_i, p_k, qui étaient des fonctions indépendantes de a, a_i, b_k, deviennent maintenant des fonctions de n variables seulement, puisque a est traitée comme une constante et qu'il y a n relations entre les a_i, b_k. Donc, en général, il existera $n+1$ relations entre

$$z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n,$$

qui permettront d'exprimer $z, p_1, \ldots, p_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$. Comme d'ailleurs en vertu de l'identité (43) on a ici

$$dz = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n,$$

$p_1, \ldots, p_n$ seront bien les dérivées de z. *Donc, en général, la mé-*

thode de Lagrange conduit à une solution. Voyons maintenant quels sont les cas d'exception du raisonnement précédent.

Les fonctions z, x_i, p_k étaient des fonctions indépendantes de a, a_i, b_k; mais lorsqu'on a écrit les relations qui existent entre les a_i, b_k, et traité a comme une constante, elles deviennent des fonctions de n variables seulement. Or il peut se faire que l'élimination de ces n variables conduise à plus de $n+1$ équations entre $z, x_1, \ldots, x_n$, $p_1, \ldots, p_n$. Ainsi, en dehors même des cas d'impossibilité des équations que nous laissons de côté, voilà une première difficulté qui peut se présenter et qui montre que, *si la méthode de Lagrange doit donner toutes les solutions, elle ne donnera pas nécessairement des solutions.*

Considérons, par exemple, l'intégrale complète

$$z + a = a_1 x_1^3 + a_2 x_1^2 x_2;$$

d'où l'on déduit

$$p_1 = 3a_1 x_1^2 + 2a_2 x_1 x_2, \qquad b_1 = x_1^3,$$
$$p_2 = a_2 x_1^2, \qquad b_2 = x_1^2 x_2;$$

si l'on cherche la solution correspondante à l'hypothèse

$$b_1 = 0, \qquad b_2 = 0,$$

on trouvera

$$x_1 = 0, \qquad z = -a, \qquad p_1 = 0, \qquad p_2 = 0,$$

c'est-à-dire quatre relations entre x, z, p_1, p_2, au lieu de trois que l'on devait avoir seulement.

Mais ce cas d'exception se présente très rarement; il y en a un autre qu'il est plus important de considérer.

Nous avons vu que z, x_i, p_k deviennent en général, par la solution de l'équation

$$b_1 da_1 + \ldots + b_n da_n = 0,$$

des fonctions de n variables indépendantes. Supposons que l'élimination de ces n variables indépendantes conduise à $n+1$ relations seulement entre

$$z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n.$$

La méthode de Lagrange pourra encore se trouver en défaut si parmi ces $n+1$ relations distinctes il y en a plusieurs contenant seulement $z, x_1, \ldots, x_n$.

Par exemple, dans le cas de deux variables indépendantes, on cherchait une surface; on trouve une courbe ou un point : la solution disparaît.

Remarquons que, dans le cas actuel, z, x_i, p_k sont liées par $n+1$ relations, et d'ailleurs l'on a encore

$$dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n.$$

Donc, d'après le lemme III, pour avoir toutes les relations qui existent entre les variables, il faut seulement connaître celles qui sont indépendantes de $p_1, \ldots p_n$ et qui conduisent à exprimer $n+1$ de ces variables en fonction des n autres.

Par une extension donnée au mot solution, extension qui est due à M. Lie, nous ferons la convention suivante.

Nous appellerons solution tout système de valeurs de z, x_i, p_k dépendant réellement de n variables indépendantes et pour lequel on aura

$$dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n.$$

Une telle solution est, d'après le lemme III, complètement définie quand on connaît toutes les relations qui existent entre $z, x_1, \ldots, x_n$.

Par exemple, pour le cas de deux variables, nous considérerons comme solution une courbe accompagnée de ses plans tangents, un point accompagné de tous les plans qui y passent, et cette convention diminuera beaucoup les cas d'exception de la méthode de Lagrange.

On peut encore la présenter de la manière suivante. Appelons *élément* un système de valeurs des $2n+1$ quantités z, x_i, p_k. Par exemple, pour le cas de deux variables, l'*élément* sera un point accompagné d'un plan qui y passe. Alors l'équation aux dérivées partielles définit une propriété de l'élément, et nous appelons solution

tout groupe d'éléments dépendant de n arbitraires indépendantes et pour lequel on a

$$dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n.$$

Ainsi, dans le cas de deux variables, pour un point accompagné de tous les plans qui y passent, p et q sont arbitraires. D'ailleurs la relation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

est satisfaite, puisque, lorsqu'on passe d'un élément à un autre, on a

$$dz = 0, \qquad dx = 0, \qquad dy = 0.$$

Donc, nous aurons ainsi une solution. Mais un plan accompagné des plans tangents d'un cône ne donnerait pas une solution, parce que l'élément ne dépendrait que d'une seule variable indépendante.

Ces conventions nous paraissent offrir de grands avantages. Elles empêchent notamment certaines solutions de se perdre quand on fait des transformations fort simples. Ainsi, supposons qu'une équation aux dérivées partielles admette comme intégrale une sphère. Transformons par rayons vecteurs réciproques, de manière à avoir un plan. C'est encore une solution. Mais si l'on transforme maintenant par polaires réciproques, les points de ce plan se transforment en plans passant par un point fixe, ce qu'on ne regarde pas d'habitude comme une solution. Pour nous ce point, accompagné de tous les plans qui y passent, demeure une intégrale.

Prenons de même une surface développable, la même transformation en fait une courbe accompagnée de tous ses plans tangents.

Du reste, ces solutions nouvelles que nous proposons d'introduire ne compliqueront aucune de nos discussions, et même, par une transformation fort simple, on pourra toujours les ramener aux solutions normales.

Supposons, en effet, que l'une de ces solutions soit représentée par les équations

$$z = \psi(x_k, \ldots, x_n),$$
$$x_1 = \psi_1(x_k, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{k-1} = \psi_{k-1}(x_k, \ldots, x_n).$$

On aura, d'après le lemme III,

$$z, x_1, \ldots, x_{k-1}, \qquad p_k, p_{k+1}, \ldots, p_n,$$

exprimés en fonction des n variables indépendantes

$$p_1, \ldots, p_{k-1}, \qquad x_k, \ldots, x_n.$$

Si donc on pose

$$z' = z - p_1 x_1 - \ldots \quad - p_{k-1} x_{k-1}, \tag{48}$$

z' pourra s'exprimer en fonction des variables indépendantes, et l'on aura

$$\left\{\begin{array}{l} dz' = dz - d(p_1 x_1 \ldots + p_{k-1} x_{k-1}) \\ \quad = -(x_1\, dp_1 + \ldots + x_{k-1}\, dp_{k-1}) + p_k\, dx_k + \ldots + p_n\, dx_n, \end{array}\right. \tag{49}$$

ce qui donne, en prenant comme nouvelles variables indépendantes

$$p_1, \ldots, p_{k-1}, \qquad x_k, \ldots, x_n$$

et z' comme nouvelle fonction : 1° une seule relation entre z' et les variables indépendantes; 2° les formules

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial z'}{\partial p_1} = -x_1, \ldots, \dfrac{\partial z'}{\partial p_{k-1}} = -x_{k-1}, \\ \dfrac{\partial z'}{\partial x_k} = p_k, \ldots, \dfrac{\partial z'}{\partial x_n} = p_n, \end{array}\right. \tag{50}$$

qui permettent de réaliser très simplement le changement de variables indiqué. Ainsi, on peut toujours ramener, par un changement de variables des plus simples, une solution quelconque à être représentée par une seule équation.

§ 18. EXAMEN DES DIFFÉRENTES CLASSES DE SOLUTIONS; PASSAGE D'UNE INTÉGRALE COMPLÈTE À UNE AUTRE.

Si nous nous contentions de l'examen rapide qui précède, la solution singulière n'aurait pas l'importance exceptionnelle qu'on doit lui attribuer. Il y aurait $n+1$ classes d'intégrales, suivant qu'on établirait $n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$ relations entre les arbitraires a_i. La solution singulière formerait à elle seule la dernière classe, chacune des n autres devant être étudiée avec le même soin. En fait, cette distinction est inexacte; les intégrales que nous avons appelées générales et complètes appartiennent à un groupe unique, et leur différence apparente ne provient que du choix de l'intégrale complète qui sert de point de départ. C'est ce qu'on peut établir en étudiant la relation entre deux intégrales complètes quelconques de la même équation aux dérivées partielles.

Rappelons rapidement les points établis. Des formules (39) définissant l'intégrale complète nous avons déduit l'identité fondamentale

$$(51)\qquad da - b_1\,da_1 - \ldots - b_n\,da_n = \rho\,(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n),$$

où $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, \rho$ sont des fonctions de $2n+1$ variables indépendantes z, x_i, p_k, fonctions qui seront complètement déterminées lorsqu'on connaîtra le groupe des formules (39). Réciproquement, toute identité de la forme précédente vérifiée par des fonctions a_i, b_k des $2n+1$ variables z, x_i, p_k, donnera naissance à une intégrale complète. Les relations qui existent entre les variables $z, x_1, \ldots, x_n, a, a_1, \ldots, a_n$ étant écrites constitueront le système analogue aux formules (39) et suffiront à déterminer toutes les autres fonctions b_i, p_k.

Si donc α_i, β_k désignent les fonctions qui jouent le rôle des a_i, b_k pour une autre intégrale complète, α_i, β_k devront satisfaire uniquement à une identité de la forme :

$$(52)\qquad da - \beta\,d\alpha_1 - \ldots - \beta_n\,d\alpha_n = \rho'\,(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n).$$

On aura donc, en vertu de la formule (51),

$$(53)\quad da-\beta_1\,d\alpha_1-\ldots-\beta_n\,d\alpha_n=\sigma\,(da-b_1\,da_1-\ldots-b_n\,da_n),$$

où la valeur de σ est

$$\sigma=\frac{\rho'}{\rho}.$$

La formule (53) contient et définit toutes les relations qui existent entre deux intégrales complètes.

Elle est d'ailleurs identique à l'équation traitée dans le lemme I, quand dans le premier membre on remplace a par α. Elle devient, en effet, après cette substitution,

$$d\alpha-\beta_1\,d\alpha_1-\ldots-\beta_n\,d\alpha_n=\sigma\,(da-b_1\,da_1-\ldots-b_n\,da_n),$$

et ne diffère que par les notations de celle du lemme I. Pour la résoudre de manière que l'on ait $\alpha=a$, il suffira de choisir convenablement l'une des relations entre les α et les a, de partir du système d'équations suivant

$$(54)\quad\begin{cases}\alpha=a,\\ \psi_1(a,a_1,\ldots,a_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \psi_h(a,a_1,\ldots,a_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n)=0,\end{cases}$$

et l'on aura les quantités b_i,β_i par les formules :

$$(55)\quad\begin{cases}\pi=\lambda(\alpha-a)+\lambda_1\psi_1+\ldots+\lambda_h\psi_h\\ \dfrac{\partial\pi}{\partial a}\,b_i+\dfrac{\partial\pi}{\partial a_i}=0\\ \dfrac{\partial\pi}{\partial\alpha}\,\beta_i+\dfrac{\partial\pi}{\partial\alpha_i}=0.\end{cases}$$

Telles sont les formules qui résolvent l'identité (53) et qui nous permettent de passer d'une intégrale complète à une autre.

Mais on peut en trouver de plus simples, en imaginant que la constante arbitraire a ait été introduite d'une manière spéciale,

par exemple en changeant z en $a+z$. Alors toutes les dérivées par rapport à a et à z seront égales, et la formule qui définit ρ nous donne $\rho=-1$. Par suite, l'identité (51) relative à chaque intégrale complète prend la forme plus simple

$$(56)\qquad \begin{cases} dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n \\ = -(da - b_1\,da_1 \ldots - b_n\,da_n), \end{cases}$$

et la formule (53) devient alors

$$(57)\qquad b_1\,da_1 + \ldots + b_n\,da_n = \beta_1\,d\alpha_1 + \ldots + \beta_n\,d\alpha_n,$$

où a ne figure plus.

Cette équation se résout comme la précédente; soient

$$(58)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = f_1(\alpha_k, \ldots, \alpha_n, \quad a_1, \ldots, a_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k-1} = f_{k-1}(\alpha_k, \ldots, \alpha_n, \quad a_1, \ldots, a_n) \end{cases}$$

les $k-1$ relations distinctes existant entre les variables a_i, α_i. En substituant les différentielles $d\alpha_1, \ldots, d\alpha_{k-1}$ dans l'identité (57), on aura

$$(59)\qquad \begin{cases} b_1 = \beta_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_1} + \cdots + \beta_{k-1} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n = \beta_1 \frac{\partial f_1}{\partial a_n} + \cdots + \beta_{k-1} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial a_n}, \\ -\beta_k = \beta_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_i} + \cdots + \beta_{k-1} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial \alpha_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\beta_n = \beta_1 \frac{\partial f_1}{\partial \alpha_n} + \cdots + \beta_{k-1} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial \alpha_n}. \end{cases}$$

Telles sont les formules qui résoudront la question. Remarquons que cette solution est *tout à fait indépendante de l'équation particulière choisie;* elle sera la même pour toutes les équations aux dérivées partielles.

Les formules précédentes nous donneront pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$, des résultats de la forme

$$(60)\qquad \begin{cases} \alpha_i = \varphi_i\left(a_1, \ldots, a_n, \frac{b_2}{b_1}, \ldots, \frac{b_n}{b_1}\right), \\ \beta_k = b_1 \psi_k\left(a_1, \ldots, a_n, \frac{b_2}{b_1}, \ldots, \frac{b_n}{b_1}\right), \end{cases}$$

dont la forme donne lieu à d'importantes conséquences.

Nous voyons d'abord que, pour la nouvelle intégrale complète, les différentes classes d'intégrales précédemment obtenues ne seront plus distinguées.

Ainsi les anciennes intégrales complètes, celles qu'on obtiendrait en laissant $a_1, \ldots, a_n$ constantes, nous donneront pour $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des fonctions de ces constantes et de $n-1$ variables à éliminer $\frac{b_2}{b_1}, \ldots, \frac{b_n}{b_1}$; il y aura donc, en général, une seule relation entre les arbitraires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, et l'on reconnaîtra aisément que cette conclusion s'applique aux différentes classes d'intégrales générales.

Il n'en est plus de même pour l'intégrale singulière. Si nous faisons, en effet, dans les n premières formules (59)

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0,$$

ces formules nous donnent

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{k-1} = 0;$$

car tous les dénominateurs tels que

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \ldots \frac{\partial f_{k-1}}{\partial a_{k-1}}$$

ne peuvent être nuls; sans quoi il y aurait, en vertu des formules (58), une relation entre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, ce qui est inadmissible. Les dernières équations (59) nous donnent ensuite

$$\beta_k = \beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 0.$$

Ainsi, l'intégrale singulière forme bien une classe à part, indépendante de l'intégrale complète choisie.

Mais, après la démonstration de ce point essentiel, nous avons à signaler un autre fait curieux, relatif à l'intégrale singulière.

Supposons, pour fixer les idées, que, la première intégrale complète ayant été choisie, $a_1, \ldots, a_n$ soient des fonctions ayant des valeurs déterminées pour chaque élément de l'intégrale singulière. C'est ce qui arrive, par exemple, pour le cas de deux variables, si les intégrales complètes touchent leur enveloppe en un nombre limité de points et s'il y en a un nombre limité tangent en chaque point à l'enveloppe. Alors les constantes a et b sont pour chaque point de l'enveloppe des fonctions déterminées de x et de y. C'est là, du reste, le cas général dans la théorie des enveloppes.

Mais si $a_1, \ldots, a_n$ sont déterminés pour chaque point de l'enveloppe, il n'en sera plus de même quand on changera d'intégrale complète. Les formules (60) nous présentent $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ comme fonctions de $a_1 \ldots a_n$ et de quantités $\frac{b_2}{b_1}, \ldots, \frac{b_n}{b_1}$, qui sont tout à fait arbitraires, puisqu'elles sont des rapports de deux quantités qui deviennent nulles. En désignant par $\mu_1 \ldots, \mu_r$ ceux de ces rapports qui subsistent dans les formules (60), on voit que ces formules nous présentent $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ comme des fonctions de la forme

$$\alpha_i = \varphi_i(a_1, \ldots, a_n, \mu_1, \ldots, \mu_r), \tag{61}$$

où l'on peut prendre arbitrairement $\mu_1, \ldots, \mu_r$. Les nouvelles valeurs α_i correspondantes à un élément de l'intégrale singulière ne sont donc plus déterminées, et, s'il est permis d'employer ce langage géométrique, parmi les nouvelles intégrales complètes, il y en a une infinité qui sont tangentes au même point de l'intégrale singulière.

Ce résultat sera pleinement confirmé et éclairci par les remarques géométriques suivantes relatives au cas de deux variables. Soient des intégrales complètes I touchant, chacune en un nombre limité de points, l'intégrale singulière (Σ). Toute autre intégrale complète I′ sera formée en prenant l'enveloppe des intégrales I touchant (Σ) suivant les différents points d'une courbe contenant

dans ses équations deux paramètres variables α et β. Comme il passe une infinité de telles courbes par chaque point de l'intégrale singulière, on voit que α et β ne seront pas des fonctions déterminées en chaque point de cette intégrale.

Par exemple, si les premières intégrales complètes sont les plans tangents à une surface (Σ), soient a et b les paramètres qui fixent la position de ces plans; a et b seront des fonctions déterminées des coordonnées du point de contact de chaque plan. Mais si nous prenons comme nouvelles solutions complètes les surfaces développables circonscrites, par exemple, à (Σ) suivant les sections planes, parallèles à l'axe des z, dont l'équation est

$$y = \alpha z + \beta,$$

α et β ne seront plus des fonctions déterminées en chaque point de (Σ) et, par conséquent, ne seront pas des fonctions déterminées de a et de b, puisque, en chaque point de la surface, il passe une infinité de sections parallèles à l'axe des z.

Le fait que nous venons de signaler entraîne une autre conséquence. Les formules (61) contenant r arbitraires $\mu_1, \ldots, \mu_r$, si nous établissons, pour trouver une intégrale générale au moyen de la nouvelle intégrale complète, r relations, ou moins de r relations entre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, on pourra disposer des arbitraires $\mu_1, \ldots, \mu_r$ des formules (61), de manière à satisfaire à ces relations. Si donc on prend pour $a_1, \ldots, a_n$ les valeurs qui correspondent aux éléments de l'intégrale singulière, et que l'on fasse

$$b_i = \beta_k = 0,$$

les formules (60) seront vérifiées, et l'on trouvera la solution singulière. Ainsi, *cette solution se trouvera en facteur dans toutes les intégrales générales pour lesquelles on établira r ou moins de r relations entre les nouvelles arbitraires* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Par exemple, si, reprenant l'exemple déjà traité, on substitue aux plans tangents à une surface (Σ) les développables circonscrites suivant les sections planes parallèles à Oz, toute enveloppe

d'une suite simple de ces surfaces comprendra évidemment en facteur la surface (Σ).

Quoi qu'il en soit de ces remarques, il est établi que la solution singulière, quand elle existe, satisfait, quelle que soit l'intégrale complète, aux équations

$$b_1 = 0, \ldots, b_n = 0,$$

et cette propriété fondamentale va nous apprendre comment on la déduit de l'équation aux dérivées partielles, sans passer par aucune intégrale complète.

§ 19. LA SOLUTION SINGULIÈRE DÉDUITE DE L'ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Supposons toujours, pour plus de netteté, que la constante a soit liée à z, en sorte que l'équation aux dérivées partielles soit de la forme

$$(62) \qquad F(z+a, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0,$$

et désignons par

$$(63) \quad Z(dz+da) + X_1\,dx_1 \ldots + X_n\,dx_n + P_1\,dp_1 + \ldots + P_n\,dp_n$$

sa différentielle totale. L'identité (56) deviendra ici

$$(64) \quad da - b_1\,da_1 - \ldots - b_n\,da_n = -(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n).$$

Cela posé, pour la solution singulière on a

$$b_1 = 0, \ldots, b_n = 0.$$

Ainsi, les valeurs de z, x_i, p_k correspondantes à un élément de cette solution satisfont à ces n équations. Partons d'un système de valeurs z, x_i, p_k satisfaisant à ces équations, mais *donnons à* dz, dx_i, dp_k *des valeurs quelconques*. Quelles que soient ces valeurs, la formule (64) nous donnera pour la différentielle de da l'expression

$$(65) \qquad da = -dz + p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n$$

indépendante de $dp_1, \ldots, dp_n$. Or l'équation (62), qui définit a consi-

dérée comme fonction des variables indépendantes z, x_i, p_k, nous donne aussi sa différentielle. Nous en déduisons

$$da = -dz - \frac{X_1}{Z}dx_1 - \ldots - \frac{X_n}{Z}dx_n - \frac{P_1}{Z}dp_1 - \ldots - \frac{P_n}{Z}dp_n.$$

En comparant cette expression à la formule (65), on voit que nous devons avoir

$$(66)\qquad \begin{cases} P_1 = 0, \ldots, P_n = 0, \\ X_1 + p_1 Z = 0, \ldots, X_n + p_n Z = 0. \end{cases}$$

Ainsi, la solution singulière doit satisfaire, en même temps qu'à l'équation proposée, aux $2n$ équations (66).

Nous sommes donc conduit à un résultat tout semblable à celui que nous avons obtenu dans le cas de deux variables, et nous voyons que, pour les équations aux dérivées partielles formées par l'élimination des constantes, les $2n+1$ équations qu'on obtient en adjoignant aux équations (66) l'équation proposée doivent être vérifiées, en général, si l'on y remplace $z, p_1, \ldots, p_n$ par des fonctions convenablement choisies de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nous reviendrons sur cette conclusion paradoxale, mais auparavant nous allons en signaler une autre du même genre et qui mettra bien en évidence la nature si particulière des équations aux dérivées partielles formées par l'élimination des constantes.

Reprenons, à cet effet, les équations qui nous ont servi de point de départ et, pour plus de netteté, bornons-nous à l'intégrale complète de Lagrange

$$V(z, x_1, \ldots, x_n, a, a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

que nous supposerons même entière et algébrique par rapport aux constantes $a_1, \ldots, a_n$, pour donner plus de force à notre raisonnement.

Considérons les $2n$ équations

$$\frac{\partial V}{\partial z}p_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial a}b_i + \frac{\partial V}{\partial a_i} = 0,$$

qui, jointes à la précédente, détermineront $a, a_1, \ldots, a_n$ comme fonctions des $2n+1$ variables indépendantes z, x_i, p_k.

Exprimons que les équations

$$V = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial z} p_i + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0,$$

sont satisfaites par deux systèmes de valeurs des arbitraires a, a_i :

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_n,$$
$$a, a'_1, a'_2, \ldots, a'_n,$$

pour lesquels la valeur de a est la même.

Nous obtiendrons ainsi $2n+2$ équations qui, par l'élimination des arbitraires a_i, a'_i au nombre de $2n$, nous conduiront à deux équations seulement entre z, x_i, p_k. Soient

$$F_1(z, x_i, p_k, a) = 0, \qquad F_2(z, x_i, p_k, a) = 0$$

ces deux relations. Comme on a

$$da - b_1\, da_1 - \ldots - b_n\, da_n = \rho\,(dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n),$$

il est évident que la différentielle da de a, considérée comme fonction des variables z, x_i, p_k, aura deux valeurs suivant qu'on adoptera pour $a_1, \ldots, a_n$ l'un ou l'autre des deux systèmes de valeurs

$$a_1, \ldots, a_n,$$
$$a'_1, \ldots, a'_n.$$

Puisque cette différentielle da aura deux valeurs, il faudra que son expression fournie par l'équation aux dérivées partielles soit indéterminée.

Or cette expression est donnée par la formule

$$Z\,da + Z\,dz + X_1\, dx_1 + \ldots + P_1\, dp_1 + \ldots + P_n\, dp_n = 0.$$

Il faudra donc que l'on ait

$$F = 0, \qquad Z = 0, \qquad X_i = 0, \qquad P_k = 0,$$

et, par conséquent,

$$(67) \qquad F = 0, \qquad X_i + p_i Z = 0, \qquad P_k = 0, \qquad Z = 0.$$

Ainsi, nous arrivons à cette conclusion que le système (66), joint à

l'équation proposée et qui paraîtrait à un premier examen être plus que suffisant pour définir la solution singulière, *est encore susceptible d'une autre solution, dans laquelle il équivaudra seulement à deux relations entre les* $2n+1$ *variables* z, x_i, p_k, *et pour laquelle on aura, en outre,*

$$Z = 0.$$

C'est la généralisation d'un résultat déjà obtenu pour les équations aux dérivées ordinaires. On peut le confirmer et l'expliquer par quelques remarques géométriques relatives au cas de deux variables indépendantes. Démontrons-le même directement pour ce cas particulier.

Considérons une intégrale complète quelconque. Les plans tangents à celles des intégrales complètes qui passent en un point M y enveloppent un cône que nous avons appelé cône (T), et les normales à ce point décrivent un cône, le cône (N) des normales. Or ces deux cônes, étant formés par élimination, auront régulièrement, l'un, le cône (T), des plans tangents doubles, et l'autre, le cône (N), des droites doubles. Prenons, par exemple, comme intégrales complètes, les plans tangents à une surface (Σ). Le cône (T) sera le cône de sommet M circonscrit à (Σ); il aura pour plans tangents doubles tous les plans tangents doubles à la surface qui passent par le point M.

Ainsi, en tout point de l'espace, il y aura des droites doubles sur le cône des normales, et, par conséquent, si

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{68}$$

est l'équation aux dérivées partielles, il existera des valeurs de p et de q

$$p = \varphi(x, y, z), \qquad q = \psi(x, y, z), \tag{69}$$

pour lesquelles on aura

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial q} = 0. \tag{70}$$

D'autre part, considérons l'une des intégrales complètes tangentes

en M à ce plan tangent double. Pour cette intégrale l'équation aux dérivées partielles et par conséquent ses dérivées seront satisfaites. En prenant les dérivées, on trouve

$$(71)\qquad \frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Ainsi les trois équations (68), (71), devront être vérifiées par les valeurs de p et de q déduites des formules (70). C'est, pour le cas de deux variables, le résultat général que nous avons obtenu plus haut.

§ 20. DU RÉSULTAT PARADOXAL AUQUEL CONDUIT LA THÉORIE DE LA SOLUTION SINGULIÈRE.

Les conséquences de la théorie précédente relatives à l'intégrale singulière nous conduisent à ce résultat très remarquable que, étant donnée l'équation

$$(72)\qquad F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n)=0,$$

elle admet une solution, la solution singulière, pour tous les éléments de laquelle les relations suivantes

$$(73)\qquad \begin{cases} P_1=0, \ldots, & P_n=0, \\ X_1+Zp_1=0, \ldots, & X_n+Zp_n=0, \end{cases}$$

doivent être satisfaites. Il suit de là que, si nous nous contentons de l'examen du cas normal, celui où la solution singulière est représentée par une seule équation entre $z, x_1, \ldots, x_n$ (et nous savons qu'on peut ramener tous les cas à celui-là), les $2n+1$ équations (72), (73) doivent être vérifiées en y mettant pour $z, p_1, \ldots, p_n$ des fonctions convenablement choisies de $x_1, \ldots, x_n$, et telles en outre que p_i soit la dérivée de z par rapport à x_i. Or un tel résultat est tout à fait extraordinaire, car ces $2n+1$ équations ne contiennent que $2n+1$ variables, et il semble qu'elles doivent les déterminer toutes.

Toutefois, comme elles ne sont pas formées d'une manière quelconque, mais au moyen d'une seule fonction et de ses dérivées,

il est indispensable de démontrer directement que, la fonction F étant prise arbitrairement, elles ne peuvent être, en général, vérifiées par des valeurs de $z, p_1, \ldots, p_n$, fonctions de $x_1, \ldots, x_n$.

Au raisonnement de l'article 13, qui s'applique ici sans modification, nous ajouterons le suivant :

Soient

$$(74)\qquad \begin{cases} z = f(x_1, \ldots, x_n) \\ p_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

les valeurs de z, p_i tirées des $n+1$ équations

$$(75)\qquad F = 0, \qquad P_1 = 0, \ldots, P_n = 0.$$

S'il y avait une solution singulière, p_i serait la dérivée de z par rapport à x_i. On aurait

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Or je dis que cela n'a pas lieu, en général. Supposons en effet que F contienne une constante a, qui figurera nécessairement dans une des fonctions f, f_i. Si l'on remplace a par une fonction quelconque de $x_1, \ldots, x_n$, la constitution des équations (75) ne sera pas changée. On aura les mêmes valeurs (74) de z, p_i, mais a ne sera plus constante. Si p_i était toujours la dérivée de f par rapport à x, on devrait avoir maintenant

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial x_i},$$

quelle que soit la fonction a, résultat évidemment impossible.

Par conséquent, nous obtenons la proposition suivante :

Une équation aux dérivées partielles, formée directement d'une manière quelconque, n'a pas en général de solution singulière.

Ainsi, pendant que, partant de la notion de l'intégrale complète, nous avons reconnu comme un fait normal, confirmé par un grand nombre d'exemples, l'existence de la solution singulière, au contraire, en partant de l'équation aux dérivées partielles nous obte-

nons cette conclusion qu'il n'y a pas d'intégrale singulière. Cette contradiction ne détruit pas le mérite de la belle conception de Lagrange; mais elle montre, elle fait prévoir que *l'intégrale complète n'a pas d'existence dans un champ assez étendu des variables dont elle dépend pour qu'on ait le droit d'appliquer les principes de la théorie des enveloppes.*

Nous voyons bien que les équations formées par l'élimination des constantes auront, en général, une intégrale singulière; mais les équations, en bien plus grand nombre, qu'on ne sait pas intégrer dans le sens habituellement attaché à ces mots, celles qui ont été formées directement et d'une manière quelconque, n'en auront pas.

Pour donner une définition de l'intégrale singulière s'appliquant à tous les cas, nous adopterons la convention suivante :

Toute intégrale d'une équation aux dérivées partielles

$$F = 0$$

sera dite singulière, si pour chacun de ses éléments les $2n$ *relations*

$$P_1 = 0, \ldots, P_n = 0,$$

$$X_1 + Zp_1 = 0, \ldots, X_n + Zp_n = 0,$$

sont satisfaites, et s'il existe en outre des intégrales de l'équation ne satisfaisant pas à ces relations.

Cette dernière restriction a pour but d'éliminer, par exemple, des équations dont les premiers membres seraient des puissances $m^{ièmes}$ parfaites

$$U^m = 0.$$

Il est clair, du reste, que, si les $2n$ équations

$$P_i = 0, \qquad X_k + Zp_k = 0$$

sont satisfaites en même temps que la proposée, cela tient à ce que l'on n'a pas la forme définitive et la plus simple de cette équation.

Nous commencerons en indiquant les moyens de trouver les solutions singulières, quand il y en a.

§ 21. RECHERCHE DES SOLUTIONS SINGULIÈRES.

Reprenons les équations

$$(76)\qquad \begin{cases} F = 0, \\ P_i = 0, \qquad X_k + Z p_k = 0, \end{cases}$$

auxquelles doit satisfaire toute solution singulière, et examinons les différents cas qui peuvent se présenter :

1° Elles se réduisent à plus de $n+1$ équations distinctes, et, par conséquent, elles déterminent z, x_i, p_k comme fonctions de moins de n arbitraires indépendantes. Dans ce cas, elles ne peuvent donner une solution.

2° Supposons qu'elles se réduisent à $n+1$ distinctes et qu'elles permettent, par exemple, de définir $z, p_1, \ldots, p_n$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il pourra arriver que $p_1, \ldots, p_n$ ne soient pas les dérivées de z, et alors il n'y aura pas de solution singulière. Si au contraire p_i est la dérivée de z par rapport à x_i, nous aurons trouvé une solution satisfaisant à la définition de la solution singulière.

Je dis que, par suite du caractère particulier des équations (76), cette dernière condition, que p_i soit la dérivée de z, sera toujours satisfaite tant que Z sera différent de zéro. En effet, différentions l'équation proposée $F = 0$, en y regardant z, x_i, p_k comme autant de variables indépendantes, nous aurons

$$X_1\,dx_1 + \ldots + Z\,dz + P_1\,dp_1 + \ldots + P_n\,dp_n = 0,$$

ou, en tenant compte des équations (76),

$$(77)\qquad Z\,(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n) = 0.$$

Si donc Z n'est pas nul, on aura

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n = 0,$$

et, par conséquent, p_i est la dérivée de z par rapport à x_i.

Supposons maintenant que Z soit nul. Nous avons toujours un moyen assuré : nous pouvons vérifier directement si $p_1, \ldots, p_n$ sont les dérivées de z. On peut aussi employer la méthode suivante.

Si les équations (76) conviennent à la solution singulière, on peut les différentier, ce qui fera apparaître les dérivées secondes de z. Ajoutons au système (76) l'équation

$$Z = 0,$$

qui, par hypothèse est satisfaite, et supprimons F, dont la différentielle est identiquement nulle. Nous aurons ainsi un système de $2n+1$ équations, que nous écrivons

$$(77)^* \qquad f_1 = 0, \ \ldots, f_{2n+1} = 0.$$

Les dérivées de ces équations contiendront les dérivées secondes $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \, \partial x_k} = p_{ik}$. Je suppose qu'elles ne soient pas incompatibles et que les équations qu'on obtiendra, s'il y a lieu, par l'élimination des dérivées secondes de z entre les $n(2n+1)$ dérivées des équations précédentes, soient toutes vérifiées par les valeurs de z, p_i déjà données par les équations (76). Ce point étant admis, je reprends le système $(77)^*$, et je le différentie sans y introduire les dérivées secondes de z, mais en considérant z, p_i comme des variables indépendantes. Nous aurons des équations du type suivant

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_1} dp_1 + \cdots + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z} dz = 0.$$

Retranchons-en celles que nous avons obtenues en faisant

$$dz = p_1 \, dx_1 + \ldots + p_n \, dx_n,$$
$$dp_i = p_{i1} \, dx_1 + \ldots + p_{in} \, dx_n,$$

et qui, par hypothèse, sont vérifiées par des valeurs convenables des quantités p_{ik}. Nous aurons des relations de la forme

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial z}(dz - p_1 \, dx_1 - \cdots - p_n \, dx_n) + \sum_i \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_i}(dp_i - p_{i1} \, dx_1 - \cdots - p_{in} \, dx_n) = 0.$$

Ces relations sont au nombre de $2n+1$; lorsque tous les déterminants formés avec les lignes

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial z}, \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_n},$$

ne sont pas nuls, elles nous donnent, si nous y considérons comme des inconnues les fonctions linéaires

$$dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n,$$
$$dp_i - p_{i1}\,dx_1 - \ldots - p_{in}\,dx_n,$$

des valeurs nulles de ces inconnues. On a donc, en particulier,

$$dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n,$$

ce qui prouve que $p_1, \ldots, p_n$ sont les dérivées de z et que, par conséquent, nous avons une solution.

Si tous les déterminants que nous venons de considérer sont nuls, on pourra appliquer au troisième ordre une méthode analogue. Comme nous avons déjà la méthode de vérification directe, nous n'insisterons pas davantage sur ce point. L'exemple de l'équation

$$az^m + q^m + p^m = 0$$

prouve que l'on pourrait être obligé de continuer ainsi jusqu'à un ordre quelconque.

3° Examinons maintenant le cas où les $2n+1$ équations (76) se réduisent à moins de $n+1$ distinctes. L'examen de ce cas est d'autant plus nécessaire que, d'après une remarque déjà faite à l'article 19, les équations aux dérivées partielles formées par l'élimination des constantes jouissent de cette propriété que les $2n+1$ équations (76) sont vérifiées quand on établit seulement deux équations entre z, x_i, p_k. Il importe donc de reconnaître si à une telle solution du système (76) ne pourraient pas correspondre des solutions singulières.

Il résulte d'abord de la forme particulière des équations (76) que, dans ce cas, Z sera toujours nul.

En effet, ici encore l'équation (77) aura lieu, et si Z n'était pas nul on en déduirait

$$dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n,$$

identité qui, d'après le lemme III, équivaut au moins à $n+1$ relations distinctes entre les quantités z, x_i, p_k.

Comme il y en a ici, par hypothèse, moins de $n+1$, il faut donc que l'on ait

$$Z = 0.$$

Soient

$$f_1 = 0, \qquad f_2 = 0, \ldots, f_h = 0, \qquad h < n+1,$$

les relations distinctes auxquelles se réduit le système (76).

S'il y a une solution singulière pour laquelle toutes ces relations sont satisfaites, *ces relations, considérées comme autant d'équations aux dérivées partielles, devront avoir une solution commune.*

Or on sait reconnaître si de telles équations sont incompatibles, ou si elles admettent des solutions communes, et, quand elles admettent des solutions communes, on sait ramener la recherche de ces solutions à l'intégration d'une seule équation aux dérivées partielles. On intégrera, si on le peut, cette équation et l'on aura les solutions singulières.

Il n'y a rien de particulier à dire sur le système d'équations simultanées que nous rencontrons ici. Quoiqu'il soit dérivé d'une seule fonction, il pourra être tout à fait général.

Soient, par exemple,

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0, \qquad F_3 = 0,$$

trois équations admettant des solutions communes. L'équation

$$aF_1^2 + bF_2^2 + cF_3^2 = 0$$

admettra ces solutions communes comme solutions singulières.

Voici un exemple simple où il y aura encore des solutions singulières en nombre illimité. Soit

$$\left(z-\frac{p^2}{2}\right)^2=\frac{q^3}{9} \tag{78}$$

une équation à intégrer. Toutes les équations (76) sont vérifiées par le système

$$q=0,$$

$$z=\frac{p^2}{2},$$

qui admet les différentes intégrales

$$z=0,$$

$$z=\frac{(x-a)^2}{2}.$$

Toutes ces solutions, satisfaisant à notre définition, sont pour nous des solutions singulières.

Le point essentiel de la théorie des solutions singulières consiste maintenant dans la solution rigoureuse de la question suivante :

Rechercher s'il y a des solutions ayant des éléments communs avec la solution singulière et comment elles sont disposées dans le voisinage de cette solution; en un mot *intégrer l'équation aux dérivées partielles dans le voisinage de la solution singulière, afin de reconnaître si les relations de contact signalées pour les équations aux dérivées partielles formées par l'élimination des constantes subsistent dans tous les cas.*

Mais cette étude se lie à celle de l'intégration des équations aux dérivées partielles par les méthodes de Cauchy, étude qui fera l'objet de notre troisième partie.

Avant de la commencer, nous examinerons encore quelques questions relatives aux équations formées par l'élimination des constantes.

§ 22. DE L'ORDRE DU CONTACT DES INTÉGRALES GÉNÉRALES AVEC L'INTÉGRALE SINGULIÈRE.

Considérons l'intégrale complète.

$$V(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n) = 0, \tag{79}$$

et supposons que l'élimination de $a_1, \ldots, a_n$ entre l'équation précédente et les suivantes

$$\frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \ldots, \frac{\partial V}{\partial a_n} = 0, \tag{80}$$

conduise à une relation

$$z = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{81}$$

qui représentera la solution singulière. Nous supposerons que, pour chaque solution de cette équation ou, si l'on veut, pour chaque élément de l'intégrale singulière, $a_1, \ldots, a_n$ soient des fonctions indépendantes et déterminées de $x_1, \ldots, x_n$. C'est ce qui arrivera toutes les fois que chaque intégrale complète aura en commun avec la solution singulière un nombre limité d'éléments.

Si nous effectuons la substitution

$$z = z_1 + f(x_1, \ldots, x_n),$$

nous ramènerons la solution singulière à être représentée par l'équation

$$z = 0.$$

Remarquons que les dérivées de V par rapport à $a_1, \ldots, a_n$ demeureront les mêmes qu'avant la substitution. En outre, les dérivées de z seront augmentées chacune d'une fonction de $x_1, \ldots, x_n$, et par suite cette substitution ne changera nullement, si l'on peut s'exprimer ainsi, l'ordre du contact de deux intégrales, c'est-à-dire l'ordre de la différence des valeurs de z correspondantes, pour chacune de ces deux intégrales, à un même système de valeurs de

$$x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

Les valeurs

$$z=0, \qquad x_1=\alpha_1, \ \ldots, x_n=\alpha_n,$$

définissant un élément de l'intégrale singulière, nous pouvons toujours supposer qu'en remplaçant x_i par $x_i+\alpha_i$ on ait ramené cet élément à être déterminé par les valeurs

$$z=0, \qquad x_i=0, \qquad p_k=0.$$

Enfin, pour simplifier les calculs, nous allons effectuer une dernière transformation.

Nous soumettrons à la fois les variables a_i et les variables x_i à des substitutions linéaires différentes, choisies de telle manière que l'on ait

$$(82) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}=0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_k}=0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_k}=0, \qquad i \gtrless k,$$

pour $x_1=x_2=\ldots=x_n=z=0$, $a_1, \ldots, a_n$ ayant alors les valeurs qui sont données par les formules (79), (80). On démontrera sans peine l'existence de telles substitutions [1].

Cela posé, p_i étant défini par la formule

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}+p_i\frac{\partial V}{\partial z}=0,$$

[1] En effet, je puis toujours effectuer sur $x_1, \ldots, x_n$ une substitution linéaire qui ramène

$$\sum\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k}\,dx_i\,dx_k$$

à la forme

$$dx_1^2+dx_2^2+\ldots+dx_{n-p}^2.$$

Cela posé, puisqu'on a, en tous les points de la solution singulière,

$$\frac{\partial V}{\partial x_{n-p+k}}=0,$$

on aura aussi, en différentiant,

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_{n-p+k}\,\partial a_h}\,da_h=0.$$

Comme, par hypothèse, les fonctions a_i sont indépendantes, leurs différentielles

on voit que pour tous les éléments de l'intégrale singulière les $2n$ relations

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = 0, \qquad \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0,$$

seront satisfaites. Différentions ces équations en nous déplaçant sur la solution singulière, c'est-à-dire de telle manière que z soit tou-

peuvent prendre toutes les valeurs, et l'équation précédente ne peut subsister que si l'on a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_{n-p+k}\partial a_h} = 0.$$

D'autre part, on aura, en différentiant les équations

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0,$$

où i est au plus égal à $n-p$,

$$(a) \qquad 2\,dx_i + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial a_h}\,da_h = 0$$

et par conséquent les $n-p$ fonctions linéaires des différentielles da_h

$$U_i = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial a_h}\,da_h$$

sont indépendantes. Car, s'il y avait entre elles une relation

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_{n-p} U_{n-p} = 0,$$

on aurait aussi, en vertu de l'équation (a),

$$\lambda_1 dx_1 + \ldots + \lambda_{n-p} dx_{n-p} = 0,$$

ce qui est impossible, les différentielles dx_i ne pouvant être assujetties à aucune condition.

On pourra donc soumettre les quantités a_i à une substitution linéaire, réduisant les fonctions U_i à un seul terme et telle que l'on ait au point considéré

$$U_i = 2\,da_i.$$

Alors les équations (a) prendront la forme

$$(b) \qquad dx_i + da_i = 0.$$

et l'on aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial a_k} = 0$$

jours nul. En vertu des formules (82), nous trouverons simplement

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2}\delta a_i + \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial x_i} dx_i = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} dx_i + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial a_i}\delta a_i = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}\frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial a_i}\right)^2 = 0, \tag{83}$$

toutes les fois que i ne dépassera pas $n-p$ et que k sera différent de i.

Différentions maintenant les équations

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = 0.$$

Si i est supérieur à $n-p$, on aura, en remarquant que toutes les dérivées du premier membre par rapport aux variables x_h sont nulles,

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_h} da_h = 0,$$

ou, en égalant à zéro les coefficients de chaque différentielle,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_h} = 0 \qquad \text{pour } i > n-p.$$

Au contraire, quand i est au plus égal à $n-p$, on a

$$2\,dx_i + \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_h} da_h = 0.$$

En remplaçant dx_i par sa valeur tirée de l'équation (b) et en égalant à zéro le coefficient de chaque différentielle, on trouve

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_k} = 0.$$

En résumé, on voit que, par deux substitutions linéaires effectuées séparément sur les x_i et les a_i, on peut ramener la partie de la différentielle seconde d^2V qui ne contient pas dz à la forme

$$da_1^2 + \ldots + da_{n-p}^2 + 2\,da_1\,dx_1 + \ldots + 2\,da_{n-p}\,dx_{n-p} + dx_1^2 + \ldots + dx^2{}_{n-p},$$

p étant un nombre entier qui, au moins dans le cas général, est égal à zéro. C'est le résultat que nous admettons dans le texte.

équation que l'on peut remplacer par le système des deux suivantes :

$$(84)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = k_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial a_i}, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial a_i} = k_i \frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2}.$$

Cela posé, considérons une intégrale générale quelconque ayant en commun avec la solution singulière l'élément considéré

$$z = x_i = p_k = 0;$$

supposons qu'elle soit définie par p relations, qui donneront $a_1, \ldots, a_p$ fonctions de $a_{p+1}, \ldots, a_n$ et dont les différentielles seront :

$$(85)\qquad \begin{cases} da_1 = b_{11}\, da_{p+1} + \ldots + b_{1,n-p}\, da_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ da_p = b_{p1}\, da_{p+1} + \ldots + b_{p,n-p}\, da_n. \end{cases}$$

La solution sera définie par les équations

$$(86)\qquad \begin{cases} V = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_1} b_{11} + \dfrac{\partial V}{\partial a_2} b_{21} + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial a_p} b_{p1} + \dfrac{\partial V}{\partial a_{p+1}} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial V}{\partial a_1} b_{1,n-p} + \ldots + \dfrac{\partial V}{\partial a_p} b_{p,n-p} + \dfrac{\partial V}{\partial a_n} = 0, \end{cases}$$

entre lesquelles il faudrait éliminer $a_{p+1}, \ldots, a_n$. Mais nous garderons le système (86). Quant aux quantités p_i, elles seront données par les formules

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Différentions ces dernières formules en y introduisant, après la différentiation, les hypothèses relatives à l'élément de contact. Nous aurons

$$(87)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial a_i}\, da_i + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}\, dx_i + \frac{\partial V}{\partial z}\, dp_i = 0.$$

Pour avoir les différentielles dp_i il faudrait obtenir les da_i. On les

déduira de la différentiation des formules (86), qui, grâce aux hypothèses faites, devient très simple et donne

$$(88)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1^2}\,da_1+\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial x_1}\,dx_1\right)b_{11}+\cdots+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_p^2}\,da_p+\frac{\partial^2 V}{\partial a_p\,\partial x_p}\,dx_p\right)b_{p1} \\ \qquad +\frac{\partial^2 V}{\partial a_{p+1}^2}\,da_{p+1}+\frac{\partial^2 V}{\partial a_{p+1}\,\partial x_{p+1}}\,dx_{p+1}=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_1^2}\,da_1+\frac{\partial^2 V}{\partial a_1\,\partial x_1}\,dx_1\right)b_{1,n-p}+\cdots+\left(\frac{\partial^2 V}{\partial a_p^2}\,da_p+\frac{\partial^2 V}{\partial a_p\,\partial x_p}\,dx_p\right)b_{p,n-p} \\ \qquad +\frac{\partial^2 V}{\partial a_n^2}\,da_n+\frac{\partial^2 V}{\partial a_n\,\partial x_n}\,dx_n=0. \end{cases}$$

Ces formules (88), jointes aux relations (85), détermineraient da_1, ..., da_n, et en portant ces valeurs dans les formules (87), on aurait dp_1, ..., dp_n. Cela posé, cherchons les valeurs de dx_1, ..., dx_n pour lesquelles dp_1, ..., dp_n sont toutes nulles. L'équation (87) deviendra alors

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial a_i}\,da_i+\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}\,dx_i=0,$$

ou, en vertu des relations (84),

$$(89)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2}\,da_i+\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\,\partial a_i}\,dx_i=0.$$

Il faut maintenant éliminer les da_i entre les formules (85), (88), (89), ce qui se fera en tirant les da_i des formules (89) et les portant dans toutes les autres. *Les relations* (88) *seront identiquement vérifiées*. Quant aux formules (85), elles assujettiront dx_1, ..., dx_n à p relations. Les différentielles $dp_1, \dots, dp_n$ ne seront donc pas nulles pour toutes les valeurs de $dx_1, \dots, dx_n$. En d'autres termes toutes les dérivées secondes de z ne seront pas nulles.

Donc, dans le cas général, il n'y a aucune intégrale pour laquelle les dérivées du second ordre soient les mêmes à l'élément de contact que pour l'intégrale singulière. C'est l'extension du résultat du paragraphe 14.

Mais supposons que k des quantités $\frac{\partial^2 V}{\partial a_i^2}$, par exemple

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 V}{\partial a_k^2},$$

soient nulles. Alors, en vertu des formules (82), (83), (84), on aura aussi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_k \partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial a_k^2} = 0,$$

et, par conséquent, les formules (89) laisseront indéterminées k des quantités da_i

$$da_1, da_2, \ldots, da_k.$$

Si donc p est égal ou inférieur à k, les équations (85) détermineront ces différentielles ou quelques-unes d'entre elles et n'assujettiront, dans tous les cas, $dx_1, \ldots, dx_n$ à aucune condition. En un mot, il y aura contact du second ordre.

Quelle est la signification de ces équations

$$\frac{\partial^2 V}{\partial a_1^2} = 0, \ldots, \frac{\partial^2 V}{\partial a_k^2} = 0 ?$$

Elle exprime qu'avant la substitution linéaire, la forme

$$\sum\sum \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial a_h} da_i da_h$$

se réduit à une somme de $n - k$ carrés. Nous obtenons donc la proposition suivante.

Si, pour tous les éléments de l'intégrale singulière, la forme

$$\sum\sum \frac{\partial^2 V}{\partial a_i \partial_k a} da_i da_k$$

se réduit à une somme de $n - h$ carrés, toutes les intégrales générales obtenues en établissant au plus h relations entre les arbitraires a_i auront avec l'intégrale singulière un contact du second ordre.

C'est encore l'extension d'un résultat du paragraphe 14.

Voyons comment on reconnaîtra ces particularités sur l'équation aux dérivées partielles, et pour cela introduisons avec z la constante a, en remplaçant z par $z + a$.

$a, a_1, \ldots, a_n$ sont définis en fonction de z, x_i, p_k par les formules

$$V = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + p_i \frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

qui, en différentiant pour l'élément $z = x_i = p_k = 0$, nous donnent

$$(90) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial z}(da + dz) = 0, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial a_i} da_i + \dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial z}(dz + da) + \dfrac{\partial V}{\partial z} dp_i = 0. \end{cases}$$

On voit que le dénominateur commun des valeurs de $da, da_1, \ldots, da_n$ tirées de ces équations se réduira pour cet élément à

$$\frac{\partial V}{\partial z} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial a_1} \quad \cdots \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial a_n}.$$

Donc, dans le cas exceptionnel que nous étudions, il deviendra nul. Comme, d'autre part, da est bien déterminé par la première des relations (90), nous voyons : 1° que la valeur de da déduite en différentiant l'équation aux dérivées partielles devra être indéterminée; 2° que sa vraie valeur étant

$$da = -dz,$$

ou, avant la substitution qui ramène l'intégrale singulière à un plan,

$$(91) \qquad da = -dz + p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n,$$

il faudra qu'en passant aux dérivées secondes on obtienne cette valeur. Ainsi on aura pour cette classe de solutions singulières

$$P_i = 0, \qquad X_k = 0, \qquad Z = 0, \qquad F = 0,$$

et la valeur de da, obtenue en égalant à zéro la différentielle totale seconde de F, devra être celle qui est donnée par les formules (91), ce qui entraînera un grand nombre de conditions et en particulier les suivantes :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2} = 0.$$

Nous confirmerons ce résultat par une analyse plus rigoureuse.

TROISIÈME PARTIE.

ÉTUDE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES PAR L'EMPLOI DES SÉRIES.

§ 23. LEMMES PRÉLIMINAIRES.

Cauchy a, le premier, démontré l'existence de l'intégrale dans les équations aux dérivées partielles. Dans ces derniers temps, M^me^ de Kowalewsky et l'auteur se sont aussi occupés de cette question. Nous allons ici, pour donner une base solide à nos recherches, exposer les principaux résultats de ces travaux.

Nous dirons qu'une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est développable pour un système $x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ$ de valeurs des variables lorsque la fonction est développable en une série ordonnée suivant les puissances des différences $x_1 - x_1^\circ, \ldots, x_n - x_n^\circ$, convergente pour toutes les valeurs de ces variables, dont les modules sont inférieurs à un certain nombre.

Théorème I (de Cauchy). *Soit donné le système d'équations aux dérivées partielles*

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i,k} A_{ik}^{1} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + B_1 & (i = 1, 2, \ldots, p) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i,k} A_{ik}^{2} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + B_2 & (k = 1, 2, \ldots, n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_p}{\partial t} = \displaystyle\sum_{i,k} A_{ik}^{p} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + B_p \end{cases}$$

contenant p fonctions inconnues, $u_1, \ldots, u_p$ de $n+1$ variables indépendantes, $t, x_1, \ldots, x_n$ et linéaires par rapport aux dérivées des fonc-

tions inconnues, en sorte que les coefficients A_{ik}, B_h *sont des fonctions des seules variables* $u_1, \ldots, u_p, t, x_1, \ldots, x_n$.

Il y aura toujours des fonctions $u_1, \ldots, u_p$ *satisfaisant à ces équations et se réduisant pour* $t = t_0$ *à des fonctions déterminées* $\psi_1, \ldots, \psi_p$ *de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *sous les conditions suivantes :*

1° *Les fonctions* ψ *seront développables pour le système de valeurs*

$$x_1 = x_1^0, \quad \ldots, \quad x_n = x_n^0;$$

soit ψ_h^0 *la valeur de* ψ_h *pour* $x_i = x_i^0$;

2° *Les fonctions* A_{ik}, B_h *seront développables pour les valeurs* t_0 *de* t, x_i^0 de x_i, ψ_h^0 de u_h.

Si ces deux conditions sont remplies, il existera un système de solutions et un seul, formé de fonctions $u_1, \ldots, u_p$ *développables pour les valeurs* t_0 *de* t, x_i^0 *de* x_i.

Ce théorème donné par Cauchy a été démontré d'une manière extrêmement simple par M^me^ de Kowalewsky. Nous l'admettrons dans ce qui va suivre. Mais nous remarquerons qu'au point de vue des applications, on peut lui donner une plus grande utilité par la modification suivante, qui ne porte que sur la forme.

Supposons qu'on ordonne les séries trouvées suivant les puissances de $t - t_0$. On aura pour les fonctions u_k des expressions de la forme

$$u_k = \psi_k + \psi_k^1 (t - t_0) + \psi_k^2 (t - t_0)^2 + \ldots$$

Le théorème précédent nous montre que ces séries seront toujours convergentes pour des valeurs suffisamment petites du module de $t - t_0$ tant que les fonctions initiales ψ_k et les coefficients A_{ik}, B_h demeureront continus quand on y remplacera u_k par ψ_k. Cette modification dans le groupement des termes offre l'avantage de ne pas faire dépendre la convergence de ces séries des valeurs attribuées aux variables x_i.

Par exemple, si les coefficients A_{ik}, B_h sont toujours développables, et qu'il en soit de même des fonctions ψ_h, les séries précédentes seront convergentes pour tout système de valeurs de

$x_1, \ldots, x_n$, tant que le module de $t - t_0$ ne dépassera pas une certaine limite, variable d'ailleurs avec le système de valeurs considéré des variables x_i.

Théorème II. *Les équations*

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \mathcal{F}_1\left(u_\alpha,\ x_\beta,\ t,\ \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_p}{\partial t} = \mathcal{F}_p\left(u_\alpha,\ x_\beta,\ t,\ \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) \end{cases}$$

admettent un système unique de solutions développables se réduisant pour $t = t_0$ à des fonctions connues ψ_i de $x_1, \ldots, x_n$, pourvu que les conditions suivantes soient remplies :

1° *Les fonctions initiales ψ_i sont développables pour le système de valeurs $x_i = x_i^0$; soient ψ_h^0, $\left(\frac{\partial \psi_h}{\partial x_k}\right)^0$ les valeurs de ψ_h, $\frac{\partial \psi_h}{\partial x_k}$ pour $x_i = x_i^0$;*

2° *Les fonctions $\mathcal{F}$ sont développables pour les valeurs x_i^0 de x_i, t_0 de t, ψ_i^0 de u_i, $\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_h}\right)^0$ de $\frac{\partial u_i}{\partial x_h}$.*

Sous ces conditions les fonctions u_i seront développables pour $t = t_0$, $x_i = x_i^0$.

Ce nouveau théorème se déduit très aisément du précédent.

Il est tout d'abord évident qu'en supposant les fonctions u_i développables, les conditions posées déterminent les coefficients des séries. De plus, un raisonnement bien connu permet de démontrer que, si les séries sont convergentes, elles satisfont au système (2). Tout se réduit donc à démontrer la convergence des séries. A cet effet, nous allons joindre aux fonctions $u_1, \ldots, u_p$, comme nouvelles inconnues, leurs np dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ par rapport à $x_1, \ldots, x_n$.

Différentions par rapport à x_h une quelconque des équations (2), nous aurons

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h}\right) = \frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial x_h} + \frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial u_{k'}}\frac{\partial u_{k'}}{\partial x_h} + \cdots + \frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial\left(\frac{\partial u_{k''}}{\partial x_\alpha}\right)}\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial u_{k''}}{\partial x_\alpha}\right) + \cdots,$$

c'est-à-dire un système de np équations, qui, jointes aux équations (2), définissent les dérivées par rapport à t des p fonctions inconnues u_i et des np dérivées $\frac{\partial u_k}{\partial x_h}$, que nous ajoutons à ces fonctions en les considérant comme de nouvelles inconnues. Or ce système de $(n+1)$ p équations est de la forme du système (1). D'ailleurs, puisqu'on connaît les valeurs initiales des fonctions u_i, on connaît aussi celles de leurs dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_h}$. Le théorème I s'applique donc ici et nous montre que les séries seront convergentes.

Ici encore, en ordonnant suivant les puissances de $t-t_0$, on verra que les séries demeureront convergentes pour des valeurs suffisamment petites de $t-t_0$, pourvu que les fonctions $\mathcal{F}$ demeurent continues quand on y remplace u_i et les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_h}$ par leurs valeurs initiales.

Théorème III. *Soit le système*

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \mathcal{F}_1\left(u_1, \ldots, u_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_q, t, x_1, \ldots, x_n, \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}, \ldots\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial u_p}{\partial t} = \mathcal{F}_p\left(u_1, \ldots, u_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_q, t, x_1, \ldots, x_n, \dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}, \ldots\right) \end{cases}$$

contenant q paramètres variables définis par les équations

$$(4)\quad \begin{cases} \varpi_1\left(u_1, \ldots, u_p, \alpha_i, \ldots, \alpha_q, t, x_1, \ldots, x_n, \dfrac{\partial u_i}{\partial x_h}, \ldots\right) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varpi_q\left(u_1, \ldots, u_p, \alpha_i, \ldots, \alpha_q, t, x_1, \ldots, x_n, \dfrac{\partial u_i}{\partial x_h}, \ldots\right) = 0, \end{cases}$$

et p fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_p$ de $n+1$ variables, $t, x_1, \ldots, x_n$; les fonctions u_i se déterminent comme dans le théorème précédent, pourvu que, aux conditions déjà énoncées, on ajoute les suivantes :

1° *Pour les valeurs initiales de $u_i, t, x_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$, les équations (4) donneront un système de valeurs de $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$.*

2° *Ces valeurs seront développables pour les valeurs initiales de*

$u_i, t, x_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_h}$, *condition qui sera toujours satisfaite si les fonctions* ϖ *sont développables, et si le déterminant fonctionnel*

$$\frac{d(\varpi_1, \ldots, \varpi_q)}{d(\alpha_1, \ldots, \alpha_q)}$$

n'est pas nul au début, mais qui pourra l'être dans d'autres cas.

3° *Les fonctions* $\mathcal{F}$ *seront développables pour les valeurs initiales de toutes les variables qu'elles renferment.*

Cette proposition se ramène immédiatement à la précédente, car les conditions énoncées permettent de tirer $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ des équations (4) et de les substituer dans les seconds membres des formules (3).

Théorème IV. *Les hypothèses des théorèmes précédents étant conservées, si dans les équations aux dérivées partielles il entre une ou plusieurs constantes arbitraires* $a_1, \ldots, a_\mu$, *que les fonctions* $\mathcal{F}$ (*et* ϖ, *s'il y a lieu*) *demeurent continues quand on fait varier ces constantes entre certaines limites, si, en outre, les fonctions initiales sont choisies de manière à contenir ces paramètres et à en être des fonctions continues, on peut affirmer que les solutions trouvées sont des fonctions continues de ces paramètres aussi bien que des autres variables indépendantes.*

La démonstration se fait d'un mot; il suffit en effet d'adjoindre ces paramètres comme nouvelles variables indépendantes aux anciennes.

Corollaire I. *Si les fonctions initiales contiennent des paramètres ne figurant pas dans les équations et dont elles soient des fonctions continues, les valeurs des intégrales seront continues par rapport à ces paramètres tant qu'elles seront fonctions continues des variables indépendantes.*

En effet, supposons que les séries soient convergentes pour des valeurs inférieures à certaines limites des différences $x_i - x_i^0$. En vertu du théorème précédent, elles seront, tant qu'elles seront convergentes, des fonctions continues des paramètres considérés.

Supposons maintenant que nous voulions franchir les limites de convergence des séries, nous prendrons successivement d'autres développements, qui permettront de franchir ces limites. Comme les nouvelles valeurs initiales seront des fonctions continues des anciennes et des paramètres qu'elles renferment, nous voyons que le raisonnement pourra s'appliquer tant que les intég ales demeureront continues.

Corollaire II. *Étant donné un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre déterminant des fonctions* $y_1, \ldots, y_n$ *de* x, $y_1, \ldots, y_n$ *seront des fonctions continues de leurs valeurs initiales tant qu'elles seront des fonctions continues de* x.

Cette proposition, simple cas particulier de la précédente, nous permettra d'établir sur une base solide l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre par la méthode des caractéristiques.

§ 24. INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE PAR L'EMPLOI DES CARACTÉRISTIQUES.

Considérons une équation aux dérivées partielles

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0, \tag{5}$$

dont nous écrirons toujours comme précédemment la différentielle totale. Supposons qu'il existe une intégrale de cette équation définissant z comme fonction de $x_1, \ldots, x_n$. Les équations différentielles

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n}, \tag{6}$$

déterminent complètement ce qu'on peut appeler un système de courbes tracées sur cette intégrale, si toutefois l'on suppose connue l'expression de z en fonction de $x_1, \ldots, x_n$. Nous allons d'abord montrer qu'il n'est pas nécessaire de connaître cette expression et que l'on peut joindre aux équations (6) d'autres équations différentielles qui permettent de définir complètement la variation des variables z, x_i, p_k.

Supposons que, partant d'un système de valeurs $z, x_1, \ldots, x_n$, ou, si l'on veut, d'un élément de l'intégrale, on donne d'abord à z, $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ des accroissements infiniment petits définis par les formules (6) et l'équation de l'intégrale, accroissements que nous désignerons toujours par la lettre d. Donnons ensuite aux mêmes variables un autre système d'accroissements δ satisfaisant à l'unique condition

$$\delta p_1\, dx_1 + \ldots + \delta p_n\, dx_n = 0. \tag{7}$$

Tout le succès de la méthode repose sur ce fait analytique qu'on peut donner à l'équation (7) la forme

$$dp_1\, \delta x_1 + \ldots + dp_n\, \delta x_n = 0. \tag{8}$$

Ce fait est très facile à établir. En désignant, en effet, par p_{ik} les dérivées secondes de z, on a identiquement

$$\delta p_1\, dx_1 + \ldots = dp_1\, \delta x_1 + \ldots = p_{11}\, dx_1\, \delta x_1 + \ldots + p_{12}\,(dx_1\, \delta x_2 + dx_2\, \delta x_1) + \ldots$$

Ainsi les équations (7) et (8) n'expriment qu'une seule et même relation entre les différentielles δx_i.

Ce point étant admis, différentions l'équation proposée (5) dans le système d'accroissements δ. En tenant compte de l'équation

$$\delta z = p_1\, \delta x_1 + \ldots + p_n\, \delta x_n,$$

nous aurons

$$(X_1 + Zp_1)\, \delta x_1 + \ldots + (X_n + Zp_n)\, \delta x_n + P_1\, \delta p_1 + \ldots + P_n\, \delta p_n = 0.$$

Mais en vertu des équations (6) et (7) on a identiquement

$$P_1\, \delta p_1 + \ldots + P_n\, \delta p_n = 0.$$

Il reste, par conséquent,

$$(X_1 + Zp_1)\, \delta x_1 + \ldots + (X_n + Zp_n)\, \delta x_n = 0. \tag{9}$$

Or entre $\delta x_1, \ldots, \delta x_n$ une seule relation a été établie, la relation (7) ou son équivalente (8). Il faudra donc que les équations (8) et (9) expriment la même relation entre les différentielles δx_i, et

par conséquent que les coefficients de ces différentielles dans les deux équations soient proportionnels. On a donc

$$(10)\qquad \frac{dp_1}{X_1+Zp_1}=\frac{dp_2}{X_2+Zp_2}=\ldots=\frac{dp_n}{X_n+Zp_n}.$$

Ce nouveau système d'équations, joint au système (6) et à l'équation aux dérivées partielles, définit les rapports de toutes les différentielles, et l'on a ainsi

$$(11)\qquad \frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\ldots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{-dp_1}{X_1+Zp_1}=\ldots=\frac{-dp_n}{X_n+Zp_n}=\frac{dz}{P_1p_1+\ldots+P_np_n}=dt.$$

Nous introduisons, on le voit, une variable auxiliaire t, dont l'emploi nous sera très utile et permettra de présenter la théorie de ce système d'équations différentielles avec beaucoup plus de symétrie.

Le système précédent est indépendant de toute surface intégrale, et cette remarque nous conduit au théorème fondamental qui suit :

Si deux intégrales ont en commun le même élément (z^0, x_i^0, p_k^0), *elles auront aussi en commun tous ceux que l'on obtiendra en intégrant le système* (11) *et prenant pour élément initial l'élément commun.*

Le système (11) peut s'écrire

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt}=P_i, \qquad \dfrac{dp_i}{dt}=-X_i-Zp_i \\ \dfrac{dz}{dt}=P_1p_1+\ldots+P_np_n. \end{cases}$$

Nous voyons que, tant que les seconds membres de ces équations seront finis, ce que nous supposerons constamment, ces équations donneront pour z, x_i, p_k des valeurs fonctions continues de t et des valeurs initiales de z^0, x_i^0, p_k^0. Nous supposerons que la valeur initiale de t soit zéro. Un seul cas doit être écarté, c'est celui où l'on aurait à la fois pour les valeurs initiales

$$P_i=0, \qquad X_k+Zp_k=0.$$

Alors la seule solution développable serait donnée par les formules

$$z = z^0, \qquad x_i = x_i^0, \qquad p_k = p_k^0,$$

et elle serait inacceptable.

Ainsi, en supposant que l'équation proposée soit mise sous forme entière, nous voyons, d'après le corollaire II de l'article précédent, que les équations (12) nous donneront toujours pour z, x_i, p_k *des valeurs fonctions continues de* t *et des* $2n+1$ *valeurs initiales* z^0, x_i^0, p_k^0, pourvu que ces valeurs initiales ne donnent pas des valeurs nulles de toutes les dérivées $\frac{dx_i}{dt}$, $\frac{dp_i}{dt}$. On voit que l'introduction de la variable t offre le grand avantage de supprimer les cas où les coefficients différentiels deviendraient infinis.

Puisque deux intégrales qui ont en commun le même élément en contiennent une infinité d'autres, définis par les équations différentielles (11) et (12), il est clair que toute intégrale s'obtiendra en intégrant ces formules (12), qui donnent

$$z = f(t, x_i^0, z^0, p_k^0)$$
$$x_i = f_i(t, x_i^0, z^0, p_k^0)$$
$$p_k = \varphi_k(t, x_i^0, z^0, p_k^0)$$

et y considérant x_i^0, z^0, p_k^0, comme des fonctions de $n-1$ arbitraires $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$. Toute la difficulté se réduit donc à savoir comment on déterminera les $2n+1$ valeurs initiales x_i^0, z^0, p_k^0 en fonction de ces arbitraires u, de telle manière que l'équation aux dérivées partielles soit satisfaite.

Or le système (11) admet l'intégrale

$$F(z, x_1, \ldots, p_1, \ldots) = \text{constante} = F(z^0, x_1^0, \ldots, p_1^0, \ldots).$$

Il faut donc d'abord que les valeurs initiales satisfassent à la relation

$$F(z^0, x_i^0, p_k^0) = 0, \tag{13}$$

et si cette condition est remplie, on aura toujours

$$F(z, x_1, \ldots, p_1, \ldots) = 0. \tag{14}$$

Il ne reste donc plus qu'à choisir les valeurs initiales de telle manière que p_i soit la dérivée de z par rapport à x_i, ou, ce qui revient au même, que, lorsque $t, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ varieront, les différentielles de $z, x_1, \ldots, x_n$ soient liées par la relation

$$\delta z = p_1 \delta x_1 + \ldots + p_n \delta x_n.$$

Or désignons par d les différentielles correspondantes à un déplacement sur la caractéristique, c'est-à-dire relatives au cas où t varie seule. L'identité

$$\begin{aligned}\delta(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n) - d(\delta z - p_1\,\delta x_1 - \ldots - p_n\,\delta x_n)\\ = dp_1\,\delta x_1 - dx_1\,\delta p_1 + \ldots + dp_n\,\delta x_n - dx_n\,\delta p_n\end{aligned}$$

nous conduit aux conclusions suivantes.

Remarquons d'abord que l'on a

$$dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n,$$

et remplaçons dp_i, dx_i par leurs valeurs tirées des formules (12); nous trouverons

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta z - p_1\,\delta x_1 - \ldots - p_n\delta x_n) = (X_1 + Zp_1)\,\delta x_1 + \ldots + (X_n + Zp_n)\,\delta x_n\\ + P_1\,\delta p_1 \ldots + P_n\,\delta p_n.\end{aligned}$$

Mais z, x_i, p_k vérifiant l'équation (14), on a

$$Z\delta z + X_1\,\delta x_1 + \ldots + P_n\,\delta p_n = 0,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}(15)\qquad d(\delta z - p_1\,\delta x_1 - \ldots - p_n\,\delta x_n)\\ = -Z(\delta z - p_1\,\delta x_1 - \ldots - p_n\,\delta x_n)\,dt,\end{aligned}$$

ou, en intégrant cette équation,

$$(15\ bis)\quad \delta z - p_1\delta x_1 - \ldots - p_n\delta x_n = (\delta z^0 - p_1^0\,\delta x_1^0 - \ldots - p_n^0\,\delta x_n^0)\,e^{-\int_0^t Z dt}.$$

Les équations de la caractéristique nous donnent z, x_i, p_k fonctions finies et continues de t. L'intégrale $\int_0^t Z\,dt$ demeurera finie; il suf-

fira donc, pour que le premier membre de l'égalité précédente soit constamment nul, que l'on ait

$$(16) \qquad \delta z^\circ - p_1^\circ \delta x_1^\circ, - \ldots - p_n^\circ \delta x_n^\circ = 0.$$

En résumé, les valeurs initiales doivent dépendre de $n-1$ variables indépendantes, satisfaire à l'identité (16) et à l'équation (13). Si ces conditions sont remplies, nous aurons une intégrale.

On peut satisfaire à toutes ces conditions en prenant

$$x_1^\circ = \text{constante},$$

$$z^\circ = f(x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ), \qquad p_2^\circ = \frac{\partial f}{\partial x_2^\circ}, \qquad \ldots, \qquad p_n^\circ = \frac{\partial f}{\partial x_n^\circ},$$

et p_1° sera définie par l'équation aux dérivées partielles. C'est la solution de Cauchy, et nous allons d'abord la discuter.

Si dans l'équation

$$F(z^\circ, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ, p_1^\circ, \ldots, p_n^\circ) = 0,$$

la valeur de p_1° n'annule pas $P_1^\circ = \frac{\partial F}{\partial p_1^\circ}$, p_1° sera une fonction développable de $x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$. Donc les valeurs de $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$, sont, d'après les théorèmes préliminaires, des fonctions continues de $t, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$, c'est-à-dire de n arbitraires indépendantes. Le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(t, x_2^\circ, \cdots, x_n^\circ)},$$

se réduit au début à $\left(\frac{\partial x_1}{\partial t}\right)^\circ = P_1^\circ$, qui n'est pas nul par hypothèse. On voit donc que $x_1, \ldots, x_n$ seront des fonctions indépendantes, que l'on pourra déduire des séries qui donnent $x_1, \ldots, x_n$ les quantités $t, x_2^\circ, \ldots, x_n^\circ$, en fonction de $x_1, \ldots, x_n$, et par conséquent que z sera une fonction continue développable des variables $x_1, \ldots, x_n$. Ce cas si simple ne présente donc aucune difficulté.

Mais la solution précédente n'est pas la seule que l'on ait à considérer. En prenant, par exemple, le cas de deux variables indé-

pendantes x, y, elle exprimerait que l'intégrale doit contenir une courbe plane située dans le plan

$$x = x_0.$$

Or il existe des solutions d'un autre genre. Par exemple, on peut demander que l'intégrale coupe le plan $x = x_0$ en un seul point, comme ferait un cône dont le sommet serait en un point de ce plan. On voit que, dans ce cas, la relation entre x, y, z, qui est unique, doit être remplacée par deux équations quand on coupe par le plan qui contient le sommet du cône.

Pour être sûr de ne laisser échapper aucune intégrale, il faut donc trouver les valeurs initiales les plus générales satisfaisant aux conditions posées. La première de ces conditions est que l'on ait

$$\delta z^0 - p_1^0 \delta x_1^0 - \ldots - p_n^0 \delta x_n^0 = 0.$$

Cette équation exprime qu'il y a entre $z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0$ une ou plusieurs relations indépendantes de $p_1^0, \ldots, p_n^0$, et comme les valeurs initiales dépendent seulement de $n-1$ arbitraires, il faut qu'il y en ait au moins deux. Cauchy a choisi les suivantes

$$x_1^0 = \text{constante},$$
$$z^0 = f(x_2^0, \ldots, x_n^0).$$

Prenons en un nombre quelconque k

$$\varpi_1(z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0, \quad \ldots, \quad \varpi_k(z^0, x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0,$$

et, pour simplifier les calculs, supposons que, par un changement de variables, on les ait ramenées à la forme simple

$$z^0 = 0, \quad x_1^0 = 0, \quad \ldots, \quad x_{k-1}^0 = 0. \tag{17}$$

Alors, pour que l'on ait identiquement

$$\delta z^0 = p_1^0 \delta x_1^0 + \ldots + p_n^0 \delta x_n^0,$$

il faudra que les coefficients de

$$\delta x_k^\circ, \ldots, \delta x_n^\circ$$

soient nuls, ce qui donne

$$p_k^\circ = 0, \quad \ldots, \quad p_n^\circ = 0. \tag{18}$$

Il restera donc n valeurs initiales

$$p_1^\circ, \ldots, p_{k-1}^\circ, x_k^\circ, \ldots, x_n^\circ,$$

qui seront assujetties à la seule condition de vérifier l'équation aux dérivées partielles

$$F(x_k^\circ, \ldots, x_n^\circ, p_1^\circ, \ldots, p_{k-1}^\circ) = 0. \tag{19}$$

Supposons que, pour ces valeurs initiales, quand elles varient entre certaines limites, une des dérivées

$$X_k^\circ, \ldots, X_n^\circ, P_1^\circ, \ldots, P_{k-1}^\circ,$$

P_1°, par exemple, ne soit pas nulle. De l'équation (19) on pourra déduire p_1°, qui sera une fonction développable des autres variables. En intégrant les équations de la caractéristique on obtiendra pour z, x_i, p_k des valeurs fonctions continues de

$$t, p_2^\circ, \ldots, p_{k-1}^\circ, x_k^\circ, \ldots, x_n^\circ.$$

Je dis que ces valeurs de z, x_i, p_k ne sont pas reliées par plus de $n+1$ équations.

En effet, prenons le déterminant fonctionnel

$$\frac{d(x_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, x_k, \ldots, x_n)}{d(t, p_2^\circ, \ldots, p_{k-1}^\circ, x_k^\circ, \ldots, x_n^\circ)}.$$

Pour $t = 0$, ce déterminant fonctionnel se réduit à

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = P_1^\circ$$

qui, par hypothèse, n'est pas nul. Donc les formules trouvées permettent d'exprimer $t, p_2^\circ, \ldots, p_{k-1}^\circ, x_k^\circ, \ldots, x_n^\circ$ en fonctions continues de $x_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, x_k, \ldots, x_n$, et les autres variables $z, x_2, \ldots, x_{k-1}$, $p_k, \ldots, p_n$ s'exprimeront en fonctions développables des n pre-

mières. On sera donc assuré d'avoir des valeurs z, x_i, p_k satisfaisant à l'équation

$$dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n,$$

et n'étant pas reliées par plus de $n+1$ équations, c'est-à-dire une solution de l'équation dans le sens plus général que nous avons donné à ce mot (article 17).

Nous avons admis que toutes les dérivées

$$X_k^0, \ldots, X_n^0, P_1^0, \ldots, P_{k-1}^0$$

ne peuvent être nulles en même temps.

Si elles le sont, les équations différentielles de la caractéristique donneront pour les valeurs initiales

$$dp_k = 0, \ \ldots, \ dp_n = 0, \ dx_1 = 0, \ \ldots, \ dx_{k-1} = 0,$$

équations qui coïncident avec celles que l'on obtiendrait en différentiant les relations (17), (18) entre les valeurs initiales.

Ainsi la restriction que nous avons faite a la signification suivante : il ne faut pas qu'en différentiant les équations établies entre les valeurs initiales z^0, x_i^0, p_k^0, les relations différentielles ainsi obtenues soient des conséquences des équations différentielles de la caractéristique. Tel est l'énoncé de notre hypothèse, rendu indépendant de la forme particulière donnée par un changement de variables aux relations entre les valeurs initiales.

§ 25. EXAMEN DU CAS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

Appliquons ces conclusions au cas de deux variables indépendantes, où elles auront une signification géométrique très nette, et supposons d'abord qu'il s'agisse de faire passer une intégrale par une courbe donnée (U), ou plutôt traitons directement ce problème, et nous retrouverons les résultats établis.

Imaginons, ce qui est l'hypothèse la plus générale, que les coordonnées de la courbe soient données en fonction d'un paramètre u.

Alors les valeurs initiales x_0, y_0, z_0 seront fonctions du paramètre u. Les valeurs initiales p_0, q_0, seront données par les deux équations

$$(20)\qquad \begin{cases} F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0 \\ dz_0 = p_0\, dx_0 + q_0\, dy_0, \end{cases}$$

qui expriment, la première, que l'équation aux dérivées partielles est satisfaite, la seconde, que le plan tangent contient la tangente à la courbe (U).

Cela posé, si le déterminant fonctionnel

$$(21)\qquad \frac{\partial F}{\partial p_0}\, dy_0 - \frac{\partial F}{\partial q_0}\, dx_0,$$

relatif aux valeurs de p_0, q_0 tirées des équations (20) n'est pas nul, ces équations définissent p_0, q_0 comme fonctions développables de u, et l'intégration des équations de la caractéristique nous donnera x, y, z, p, q, fonctions continues de t et de u. Du reste, la valeur initiale du déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial x}{\partial t}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

étant

$$P_0 \frac{dy_0}{du} - Q_0 \frac{dx_0}{du}$$

ne sera pas nulle, et nous voyons que les équations qui développent x, y peuvent être résolues par rapport à t et à u, et nous donneront z fonction développable de x et de y.

Or le déterminant fonctionnel (21) ne sera nul que dans le cas où la courbe (U) serait tangente à la caractéristique. Nous voyons donc que, tant que l'intégrale sera assujettie à passer par une courbe qui ne sera tangente en aucun de ses points à la caractéristique, c'est-à-dire à une génératrice rectiligne du cône (T), nous aurons une intégrale donnant z fonction développable de x, y et, par conséquent, ne présentant aucune singularité.

Cette intégrale n'aura, bien entendu, d'existence que jusqu'aux points où les caractéristiques présenteraient des singularités. Mais nous examinerons à part cette question.

Supposons maintenant que, pour un point de la courbe initiale correspondant à la valeur u_0 de u, le déterminant

$$(22) \qquad P_0 \frac{dy_0}{du} - Q_0 \frac{dx_0}{du}$$

soit nul. Alors l'intégrale aura des singularités, mais elle ne cessera pas d'exister.

Dans ce cas, en effet, les équations (20) ne définissent plus p_0, q_0 comme des fonctions développables de u; mais, en général, p_0, q_0 deviennent des fonctions continues, développables, de $\sqrt{u-u_0}$, et, par conséquent, x, y, z, p, q des fonctions continues de t et de $\sqrt{u-u_0}$. Ainsi, il y aura deux nappes de l'intégrale venant se raccorder en tous les points d'une caractéristique, celle qui correspond à la valeur $u=u_0$.

Ces résultats sont bien confirmés par quelques explications géométriques. Considérons l'intégrale qui doit passer par une courbe (U). Pour avoir chacune de ses nappes, il faut mener par chaque tangente en un point de la courbe (U) un plan tangent au cône (T) de ce point; les caractéristiques ayant leurs premiers éléments dans ces plans tangents envelopperont les différentes nappes de l'intégrale. Supposons que la tangente à la courbe (U), d'abord en dehors du cône (T), s'en rapproche. Alors deux des plans tangents tendront à se confondre, et, à la limite, deux nappes réelles viendront se raccorder. Si, sur les points qui suivent de la courbe (U), la tangente est au dedans du cône (T), les deux nappes, après s'être raccordées, disparaîtront et deviendront imaginaires.

On pourrait traiter d'autres hypothèses. Par exemple, supposons que l'on connaisse une des courbes que nous avons appelées *intégrales*, en tous les points desquelles la tangente est génératrice du cône (T). Alors p_0, q_0 satisferont constamment aux trois équations

$$(23) \qquad \begin{cases} F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0, \\ dz_0 = p_0\, dx_0 + q_0\, dy_0, \\ Q_0\, dy_0 - P_0\, dx_0 = 0, \end{cases}$$

qui, en général, détermineront p_0, q_0 comme fonctions développables de u. Il y aura donc une intégrale continue formée par les caractéristiques tangentes à cette courbe.

Traitons maintenant le cas où l'on voudrait associer toutes les caractéristiques qui passent par un point x_0, y_0, z_0. Nous n'avons encore qu'à appliquer la méthode générale; p_0, q_0 seront assujetties à l'unique condition

$$F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = 0,$$

d'où l'on pourra tirer soit p_0 en fonction de q^0, soit q_0 en fonction de p_0. Supposons, par exemple, que, dans une certaine étendue des valeurs de p_0, q_0, la dérivée $\frac{\partial F}{\partial p_0}$ ne devienne pas nulle. L'équation précédente permettra de développer p_0, et par suite, x, y, z, p, q deviendront des fonctions continues de q_0, t. Le déterminant fonctionnel

$$\frac{\partial p}{\partial t}\cdot\frac{\partial q}{\partial q_0} - \frac{\partial p}{\partial q_0}\cdot\frac{\partial q}{\partial t}$$

se réduira, pour les valeurs initiales, à

$$\frac{1}{P}[P(X+pZ)+Q(Y+qZ)].$$

Tant que cette expression ne sera pas nulle, les équations qui développent p et q pourront être résolues par rapport à t, q_0, et x, y, z deviendront des fonctions développables de p et de q. Il ne saurait être question évidemment de développer z suivant les puissances de x et de y, car une série de ce genre ne peut jamais représenter une intégrale à point conique comme celle qui est formée des caractéristiques passant en un point.

Ainsi se trouvent établis, par une voie à l'abri de toute objection, les résultats que nous a donnés la première partie de notre travail, pour les équations aux dérivées partielles formées par l'élimination des constantes.

§ 26. EXAMEN DE L'OBJECTION DE M. BERTRAND [1].

Nous avons trouvé la formule

$$(24)\quad \delta z - p_1\delta x_1 - \ldots - p_n\delta x_n = (\delta z^0 - p_1^0\delta x_1^0 - \ldots - p_n^0\delta x_n^0)\, e^{-\int_0^t Z dt}$$

et nous avons conclu que, si les conditions initiales ont été choisies de telle manière que l'on ait

$$\delta z^0 - p_1^0\delta x_1^0 - \ldots - p_n^0\delta x_n^0 = 0,$$

on aura de même, pour tous les éléments de la caractéristique,

$$\delta z - p_1\delta x_1 - \ldots - p_n\delta x_n = 0.$$

Dans notre méthode, cette conclusion est évidente. Les équations de la caractéristique, étant

$$(25)\qquad \frac{dx_i}{dt} = P_i, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -X_i - Zp_i,$$

fourniront pour z, x_i, p_k des valeurs fonctions continues de t. Z n'étant jamais supposé infini, l'intégrale $\int_0^t Z dt$ conservera une valeur finie. Un seul cas, nous l'avons fait remarquer, mettrait cette méthode en défaut; c'est celui où l'on aurait pour les valeurs initiales

$$P_i = 0, \qquad X_i + Zp_i = 0;$$

car alors les intégrales continues fournies par les formules (25) n'auraient aucune utilité. Elles seraient

$$x_i = x_i^0, \qquad p_i = p_i^0, \qquad z = z^0,$$

et ne donneraient pas la caractéristique, s'il y en a une.

[1] L'objection dont nous voulons parler ici, et qui s'adresse à toutes les méthodes complètes d'intégration des équations aux dérivées partielles, est bien connue des géomètres ayant étudié cette théorie. Elle a été développée dans le tome XIV des *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, p. 617, et elle a donné lieu à différents travaux, parmi lesquels nous citerons ceux de M. J. A. Serret, insérés dans les *Annales scientifiques de l'École normale*, 1re série, t. III, p. 145.

Il est facile de voir que l'objection de M. Bertrand peut être levée sans l'introduction de la variable t. L'intégrale à examiner prend alors la forme suivante

$$\int_{x_1^0}^{x_1} \frac{Z\,dx_1}{P_1}.$$

Cette intégrale ne deviendra pas infinie, au moins pour des valeurs suffisamment petites de $x_1 - x_1^0$, si son premier élément n'est pas infini, c'est-à-dire si l'on n'a pas $P_1 = 0$. Supposons $P_1 = 0$; alors, en vertu des équations de la caractéristique, on peut remplacer $\frac{dx_1}{P_1}$ par l'un quelconque des rapports

$$\frac{dx_i}{P_i}, \qquad \frac{-dp_i}{X_i + Zp_i}.$$

Par suite, tant que les dénominateurs

$$P_i, \qquad X_i + Zp_i$$

ne seront pas tous nuls pour les valeurs initiales, l'intégrale de Cauchy conservera une valeur finie. Le seul cas à traiter est donc celui où tous ces dénominateurs sont nuls en même temps, et nous retrouvons les conclusions auxquelles conduit naturellement notre première méthode.

§ 27. DISCUSSION DES SINGULARITÉS DE LA CARACTÉRISTIQUE DANS LE CAS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

Soit

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{26}$$

l'équation aux dérivées partielles, et soient

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ} = dt \tag{27}$$

les équations de la caractéristique. Tant que tous les dénominateurs ne seront pas nuls, ces équations nous donneront pour x, y, z, p, q des valeurs fonctions continues de t et des valeurs initiales. Le seul cas d'exception est donc celui où tous les dénominateurs sont nuls; mais il y a des propriétés géométriques très remar-

quables de la caractéristique correspondante au cas où quelques-uns d'entre eux, convenablement choisis, sont nuls. Ce sont ces propriétés que nous allons exposer.

On voit d'abord facilement que, si P est nul sans que Q le soit, on pourra toujours changer les axes des x et des y de telle manière que ni P ni Q ne soient nuls; et, de même, si $X+pZ$ est nul sans que $Y+qZ$ le soit. La discussion est donc ramenée à l'examen des quatre cas suivants :

1° Aucun des dénominateurs n'est nul;

2° $P=0$, $Q=0$, $X+pZ\gtrless 0$, $Y+qZ\gtrless 0$;

3° $P\gtrless 0$, $Q\gtrless 0$, $X+pZ=0$, $Y+qZ=0$;

4° Tous les dénominateurs sont nuls.

Dans l'examen de tous ces cas, nous supposerons que l'origine ait été placée au point initial de la caractéristique et que le plan des xy ait été amené à se confondre avec le plan tangent; on aura donc au début

$$p=0, \quad q=0, \quad x=0, \quad y=0, \quad z=0.$$

Nous prendrons toujours la valeur initiale de t nulle.

Le développement de F sera de la forme

$$F=ax+by+cz+a'p+b'q+\dots \tag{28}$$

et, dans le premier cas, aucun des coefficients a, b, a', b' ne sera nul. Les équations différentielles de la caractéristique deviendront

$$\frac{dx}{a'+\dots}=\frac{dy}{b'+\dots}=\frac{-dp}{a+\dots}=\frac{-dq}{b+\dots}=dt, \qquad dz=p\,dx+q\,dy.$$

On aura donc, pour les premiers termes des développements en série,

$$x=a't+\dots \qquad p=-at+\dots$$

$$y=b't+\dots \qquad q=-bt+\dots$$

$$z=-(aa'+bb')\frac{t^2}{2}+\dots \qquad px+qy-z=-(aa'+bb')\frac{t^2}{2}+\dots$$

Ces équations caractérisent évidemment un point simple. Il n'y a à l'origine aucune singularité possible de la caractéristique, dont les équations approchées sont

$$(29) \qquad y = \frac{b'}{a'}x + \dots \qquad z = -\frac{aa' + bb'}{2a'^2}x^2 + \dots$$

Passons au cas où P, Q sont nuls. Alors a', b' seront nuls, et la formule (28) devra être remplacée par la suivante :

$$(30) \quad \mathrm{F} = ax + by + cz + p(a'x + b'y + c'z) + q(a''x + b''y + c''z) + \frac{\mathrm{A}p^2}{2} + \mathrm{B}pq + \frac{\mathrm{C}q^2}{2} + \varphi(x, y, z),$$

φ désignant une fonction homogène du second degré de x, y, z, et les termes négligés étant au moins du troisième degré.

Nous avons encore ici

$$p = -at + \dots \qquad q = -bt + \dots$$

et nous trouvons sans aucune difficulté

$$x = -\frac{\mathrm{A}a + \mathrm{B}b}{2}t^2 + \dots, \quad y = -\frac{\mathrm{B}a + \mathrm{C}b}{2}t^2 + \dots, \quad z = \frac{\mathrm{A}a^2 + 2\mathrm{B}ab + \mathrm{C}b^2}{3}t^3 + \dots,$$

$$px + qy - z = \frac{1}{6}(\mathrm{A}a^2 + 2\mathrm{B}ab + \mathrm{C}b^2)t^3 + \dots$$

Dans le cas le plus simple, celui où les premiers coefficients écrits ne sont pas nuls, nous voyons que x, y sont de l'ordre de t^2, z de l'ordre de t^3. Les équations approchées de la caractéristique sont de la forme suivante :

$$(31) \qquad \begin{cases} y = hx + \dots \\ z = h'x^{\frac{3}{2}} + \dots \end{cases}$$

La caractéristique est donc tangente au plan des xy et elle a *un rebroussement*.

Quant à la développable caractéristique, elle n'offre aucune singularité; son plan tangent est défini par l'équation

$$\mathrm{Z} - p\mathrm{X} - q\mathrm{Y} = z - px - qy,$$

ou, en substituant les premiers termes des développements de x, y, z, p, q,

$$Z + atX + btY + \frac{1}{6}(Aa^2 + 2Bab + Cb^2)\,t^3 = 0,$$

et cette forme n'indique aucune singularité proprement dite de la développable.

Nous obtenons donc la conclusion suivante, qui est la généralisation d'une proposition connue de la théorie des solutions singulières dans le cas des équations différentielles ordinaires :

La surface qu'on obtient en éliminant p, q entre les trois équations

$$F = 0, \qquad P = 0, \qquad Q = 0,$$

est en général le lieu des points de rebroussement des caractéristiques. A chaque point de la surface correspond une caractéristique déterminée ayant un rebroussement en ce point [1].

Arrivons maintenant aux points pour lesquels on a

$$X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0.$$

On ramène ce cas au précédent en transformant par polaires réciproques, et il est inutile de le traiter directement. La dualité reconnue dans toute équation aux dérivées partielles nous montre que, dans ce cas, la caractéristique développable aura la singularité réciproque d'un point de rebroussement. Nous l'appellerons *plan de rebroussement*. Ainsi :

La surface, lieu des points pour lesquels on a

$$X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0,$$

est en général le lieu des points pour lesquels il y a une caractéristique développable ayant un plan de rebroussement; les courbes caractéristiques n'y offrent aucune singularité.

[1] Voir, pour la proposition analogue relative aux équations différentielles ordinaires, le *Bulletin des sciences mathématiques*, t. IV, p. 158.

Nous désignerons ces deux surfaces respectivement par les lettres (R), (R′). C'est seulement quand elles auront une partie commune, pour tous les points de laquelle on aura à la fois

$$X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0, \qquad P = 0, \qquad Q = 0,$$

qu'il pourra y avoir une solution singulière, et nous avons vu d'ailleurs que cette solution existera toujours si l'on a $Z \gtrless 0$.

Examinons, enfin, les points pour lesquels on a à la fois

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0.$$

Ils sont généralement en nombre limité, puisque les quatre équations précédentes, jointes à l'équation aux dérivées partielles, constituent un système de cinq équations à cinq inconnues.

Si nous choisissons toujours les mêmes axes, le développement de F sera de la forme

$$(32) \quad F = cz + p(ax + by + kz) + q(a'x + b'y + k'z) + A\frac{p^2}{2} + Bpq + C\frac{q^2}{2} + \varphi(x, y, z) + \cdots$$

et les équations différentielles de la caractéristique deviendront

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + kz + Ap + Bq + \cdots$$
$$\frac{dy}{dt} = a'x + b'y + k'z + Bp + Cq + \cdots$$
$$-\frac{dp}{dt} = (a + c)p + a'q + \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cdots$$
$$-\frac{dq}{dt} = bp + (b' + c)q + \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \cdots$$
$$\frac{dz}{dt} = p\frac{dx}{dt} + q\frac{dy}{dt}.$$

Les seules solutions qui soient fonctions développables de t sont inacceptables; elles sont

$$x = y = z = p = q = 0.$$

Pour trouver les autres solutions, nous allons réduire les seconds

membres aux termes de moindre degré et intégrer par approximation. En vertu de la dernière équation, z sera infiniment petit par rapport à p, q, x, y. Nous aurons donc, en gardant les termes de degré moindre et posant

$$\varphi(x, y, z) = A_1 \frac{x^2}{2} + B_1 xy + C_1 \frac{y^2}{2} + \dots$$

les expressions suivantes des dérivées de x, y, p, q

$$\frac{dx}{dt} = ax + by + Ap + Bq$$

$$\frac{dy}{dt} = a'x + b'y + Bp + Cq$$

$$-\frac{dp}{dt} = (a + c)\,p + a'q + A_1 x + B_1 y$$

$$-\frac{dq}{dt} = bp + (b' + c)\,q + B_1 x + C_1 y.$$

L'intégration générale de ces équations fournira des valeurs de la forme

$$x = M\alpha e^{\rho t} + M_1 \alpha_1 e^{\rho_1 t} + M_2 \alpha_2 e^{\rho_2 t} + M_3 \alpha_3 e^{\rho_3 t}$$

$$y = N\alpha e^{\rho t} + N_1 \alpha_1 e^{\rho_1 t} + N_2 \alpha_2 e^{\rho_2 t} + N_3 \alpha_3 e^{\rho_3 t}$$

$$p = P\alpha e^{\rho t} + P_1 \alpha_1 e^{\rho_1 t} + P_2 \alpha_2 e^{\rho_2 t} + P_3 \alpha_3 e^{\rho_3 t}$$

$$q = Q\alpha e^{\rho t} + Q_1 \alpha_1 e^{\rho_1 t} + Q_2 \alpha_2 e^{\rho_2 t} + Q_3 \alpha_3 e^{\rho_3 t}$$

où $M, M_1, \dots, \rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ seront des constantes déterminées et $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les constantes arbitraires introduites par l'intégration. On voit qu'il y aura quatre caractéristiques pour lesquelles p, q, y, z seront des fonctions continues développables de x. Ce sont celles pour lesquelles on ne garderait qu'une exponentielle.

Mais il est facile de reconnaître qu'il y en aura une infinité d'autres passant au point considéré. En effet, remplaçons t par $(\lambda + \mu i)\,t$, λ, μ étant des constantes réelles quelconques, et supposons qu'après cette substitution les parties réelles de ρ, ρ_1, par exemple, soient positives et que celles de ρ_2, ρ_3 soient négatives. Alors, en ne gardant que les deux exponentielles qui contiennent

ρ, ρ_1 et faisant varier t jusqu'à $-\infty$ par des valeurs réelles, on trouvera, pour $t=-\infty$ et quels que soient α, α_1,

$$x=y=z=p=q=0.$$

Au contraire si, annulant α, α_1, on conserve les exponentielles contenant ρ_2, ρ_3 et dont les parties réelles sont négatives, on retrouvera l'origine en faisant croître t jusqu'à $+\infty$.

Mais je n'insiste pas sur ces indications, n'essayant pas de les exposer avec plus de rigueur; l'examen détaillé de la question précédente est très intéressant et mérite d'être fait complètement, mais il est étranger au sujet de notre travail, et j'arrive au cas véritablement important dans cette étude, celui où il y a une solution singulière.

§ 28. EXAMEN DES CARACTÉRISTIQUES DANS LE VOISINAGE DE L'INTÉGRALE SINGULIÈRE.

Je supposerai que, par l'artifice déjà employé, on ait réduit cette solution singulière à être le plan des xy, et je supposerai que, Z n'étant pas nul, on ait résolu par rapport à z.

L'équation prendra alors la forme

$$z=\varphi(x,y,p,q), \tag{33}$$

et comme, en tous les points du plan des xy, P, Q doivent être nuls, cette fonction φ sera nécessairement du second degré, au moins par rapport à p et à q. Nous aurons, en désignant par X, Y, P, Q les dérivées de φ par rapport à x, y, p, q, les équations suivantes de la caractéristique:

$$\frac{dx}{\mathrm{P}}=\frac{dy}{\mathrm{Q}}=\frac{dp}{p-\mathrm{X}}=\frac{dq}{q-\mathrm{Y}}=\frac{du}{u}.$$

Ici nous représentons, non plus par dt, mais par $\frac{du}{u}$ la valeur commune des rapports précédents. Les équations peuvent donc être écrites

$$\begin{cases} u\dfrac{dx}{du}=\mathrm{P}, & u\dfrac{dy}{du}=\mathrm{Q} \\ u\dfrac{dp}{du}=p-\mathrm{X}, & u\dfrac{dq}{du}=q-\mathrm{Y}. \end{cases} \tag{34}$$

Quant à z, il sera donné par l'équation (33).

Posons

$$p = p'u, \qquad q = q'u.$$

Alors, dans la fonction φ, u^2 apparaîtra en facteur, et l'on pourra poser

$$\varphi(x, y, p, q) = u^2 \varphi'(x, y, p', q', u).$$

Si nous désignons par P', Q', X', Y' les dérivées de φ' par rapport à p', q', x, y, on aura évidemment

$$P = uP', \qquad Q = uQ',$$
$$X = u^2X', \qquad Y = u^2Y',$$

et les équations (34) deviendront

$$\frac{dx}{du} = P', \qquad \frac{dy}{du} = Q',$$
$$\frac{dp'}{du} = -X', \qquad \frac{dq'}{du} = -Y'.$$

Elles sont ainsi ramenées à la forme ordinaire et donnent des valeurs de x, y, p', q' développables en série suivant les puissances de u.

Par exemple, si l'on a pour les premiers termes de φ

$$\varphi(x, y, p, q) = A\frac{p^2}{2} + Bpq + C\frac{q^2}{2} + \dots,$$

on trouvera, pour les premiers termes des développements relatifs aux caractéristiques passant par le point $x = 0, y = 0$,

$$p = \alpha u + \dots, \qquad x = (A\alpha + B\beta)\, u + \dots,$$
$$q = \beta u + \dots, \qquad y = (B\alpha + C\beta)\, u + \dots,$$

α et β étant deux constantes arbitraires qui sont les valeurs initiales de p' et de q'.

On voit donc que nous retrouvons un résultat déjà obtenu, dans la première partie de notre travail, pour les équations aux dérivées

partielles formées par l'élimination des constantes, et nous obtenons la proposition suivante :

Quand il existe une intégrale singulière pour les points de laquelle on a $Z \gtrless 0$, *il passe, en chaque point de cette intégrale et dans la direction de chacune de ses tangentes, une caractéristique ne présentant en général aucune singularité.*

Il résulte des remarques précédentes que, si l'on veut avoir des séries convergentes quand les valeurs initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 correspondent à un point de la caractéristique qui se trouve sur l'intégrale singulière, il faut adopter la variable auxiliaire u telle que l'on ait

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{-dp}{X+pZ} = \frac{-dq}{Y+qZ} = \frac{-du}{Zu}, \tag{35}$$

et l'on pourra alors développer x, y, z, p, q en séries convergentes suivant les puissances de u.

§ 29. CONSÉQUENCES DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE RELATIVES AUX SURFACES INTÉGRALES.

Nous avons vu que les caractéristiques ont, en général, des points de rebroussement dont le lieu constitue une surface (R), et que les développables caractéristiques ont des plans de rebroussement en des points dont le lieu forme une surface (R′). Voyons quelles sont les conséquences de ces faits relativement à la forme des surfaces intégrales.

Soit (S) une surface intégrale. Elle vient couper la surface (R) en tous les points d'une courbe (C). Mais les caractéristiques de (S) n'ont pas toutes sur cette courbe des points de rebroussement. En effet, pour qu'une caractéristique ait un rebroussement, il faut que les valeurs de p et de q satisfassent aux deux équations

$$P = 0, \qquad Q = 0,$$

qui, jointes à celles de la surface (S), ne déterminent qu'un nombre

limité de points. Dans le voisinage de ces points la forme de l'intégrale est très compliquée; nous la déterminerons plus loin.

Mais on peut former des intégrales particulières douées d'une ligne de rebroussement, de la manière suivante.

Sur la surface (R), soient en chaque point x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 les valeurs de x, y, z, p, q, correspondantes à la caractéristique douée de rebroussement.

Cherchons sur cette surface les courbes satisfaisant à l'équation différentielle

$$dz_0 = p_0 dx_0 + q_0 dy_0,$$

et soit (U) l'une de ces courbes. Associons les caractéristiques ayant leurs points de rebroussement sur (U), les valeurs initiales z_0, p_0, q_0, x_0, y_0 seront des fonctions continues d'un paramètre α, et les valeurs de x, y, z, p, q relatives à un point quelconque de la caractéristique seront de même des fonctions continues de t et de α. Donc ces caractéristiques formeront une surface intégrale admettant évidemment (U) comme ligne de rebroussement. On la retrouvera plus loin.

A ces intégrales à ligne de rebroussement correspondront, si l'on transforme par polaires réciproques, d'autres intégrales ayant une ligne singulière située sur la surface (R′) et en tous les points de laquelle le plan tangent aura un contact du deuxième ordre avec la surface intégrale.

Examinons le cas, plus important pour la question actuelle, où il y a une intégrale singulière, pour laquelle nous supposerons toujours que l'on ait $Z \gtrless 0$.

Nous avons vu qu'en prenant pour origine le point de la caractéristique situé sur l'intégrale singulière, on devra ici introduire une variable u telle que l'on ait

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp+Qq} = \frac{-dp}{X+qZ} = \frac{-dq}{Y+qZ} = \frac{-du}{Zu}.$$

Ces équations, étant intégrées, nous fourniront pour x, y, z, p, q

des valeurs, fonctions continues de u, de la forme

$$(36)\qquad \begin{cases} x = x_0 + A_1 u + \dots & p = p_0 + \alpha u + \dots \\ y = y_0 + B_1 u + \dots & q = q_0 + \beta u + \dots \\ z = z_0 + C_1 u + \dots \end{cases}$$

mais il importe de remarquer que les coefficients de u dans p et dans q seront tout à fait arbitraires, et qu'il passera par chaque point de l'intégrale singulière une infinité de caractéristiques, toutes tangentes à cette intégrale.

Imaginons, d'après cela, qu'étant tracée une courbe quelconque (U) sur l'intégrale singulière, on cherche s'il y a une intégrale tangente en tous les points de cette courbe à l'intégrale singulière. Soient

$$x_0 = \varphi(v), \qquad y_0 = \varphi_1(v), \qquad z_0 = \varphi_2(v),$$

les équations de cette courbe. Dans les formules (36), x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, seront des fonctions de v; mais, pour chaque valeur de v, les coefficients α et β seront quelconques, et, par conséquent, il existera une infinité de surfaces formées avec des caractéristiques différentes qui toucheront toutes l'intégrale singulière aux différents points de la courbe (U). Pour toutes ces surfaces on a évidemment

$$dz_0 = p_0 dx_0 + q_0 dy_0,$$

et comme les valeurs initiales satisfont à toutes les conditions que nous avons posées, on pourrait croire qu'elles donneront toutes des intégrales.

Dans les formules (36) il entre deux arbitraires α et β; mais les équations différentielles de la caractéristique contenant u seulement dans le quotient $\frac{du}{u}$, il est évident que l'on pourra, sans changer ces équations, remplacer u par hu, h étant une constante quelconque dont on peut disposer de manière à réduire à l'unité l'une des quantités α, β, et, par suite, par chaque point de la courbe (U) tracée sur l'intégrale singulière il passe une infinité

de caractéristiques correspondantes aux différentes valeurs du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$. Si l'on prend pour ce rapport une fonction quelconque de v, il est clair que l'on formera ainsi des surfaces engendrées par des caractéristiques, pour lesquelles toutes les conditions indiquées précédemment seront satisfaites, et qu'un premier examen nous porterait, par conséquent, à considérer comme des surfaces intégrales.

Mais reprenons la formule de Cauchy

$$\delta z - p\delta x - q\delta y = (\delta z_0 - p_0\delta x_0 - q_0\delta y_0)\, e^{-\int \frac{Z}{P}\, dx}.$$

On a bien ici

$$\delta z_0 - p_0\delta x_0 - q_0\delta y_0 = 0;$$

mais, comme l'intégrale

$$-\int \frac{Z}{P}\, dx = \int_0^u \frac{du}{u}$$

est infinie, le second membre de la formule précédente se présente sous la forme $0 \times \infty$, qui ne permet pas de conclure que le premier membre est nul. On voit que nous sommes dans un des cas où l'objection de M. Bertrand acquiert toute sa valeur. Nous ne pouvons affirmer que toutes nos surfaces sont des intégrales.

Pour résoudre cette difficulté, reprenons la formule (15), écrite, pour le cas de deux variables,

$$d(\delta z - p\delta x - q\delta y) + Z\, dt\, (\delta z - p\delta x - q\delta y) = 0.$$

Elle devient ici, en remplaçant les δ par des dérivées par rapport à v et $Z dt$ par $-\frac{du}{u}$,

$$u\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v}\right) = \frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v},$$

ce qui donne, en intégrant,

$$\frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v} = Cu. \tag{37}$$

Cette formule, on le voit, est bien vérifiée pour $u = 0$, puisqu'on a alors

$$\frac{\partial z_0}{\partial v} = p_0 \frac{\partial x_0}{\partial v} + q_0 \frac{\partial y_0}{\partial v}.$$

Mais on reconnaît aussi que toute surface formée avec les caractéristiques de la manière indiquée ne sera pas une intégrale. Il faut associer les caractéristiques de telle manière que la constante C soit nulle, ce qui exige que l'on ait au point initial

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v} - p\frac{\partial x}{\partial v} - q\frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0.$$

En développant les calculs et retranchant la quantité identiquement nulle

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - p\frac{\partial x}{\partial u} - q\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 0,$$

il restera la condition

$$\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial q}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} = 0. \tag{38}$$

Cette équation déterminera, pour chaque point de la courbe (U), la valeur qu'il faut choisir du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$. Il n'y aura donc qu'une intégrale tangente à l'intégrale singulière en tous les points de la courbe (U).

Supposons, par exemple, que, la solution singulière ayant été réduite au plan des xy, on veuille trouver l'intégrale qui lui est tangente en tous les points de l'axe des x. D'ailleurs on peut toujours, par des changements de variables, ramener à ce cas si simple tous les autres.

Les développements de x, y, z, p, q seront de la forme

$$p = \alpha u + \ldots \qquad x = x_0 + A_1 u + \ldots$$
$$q = \beta u + \ldots \qquad y = y_0 + B_1 u + \ldots$$

On aura ici, pour les points de la courbe de contact,

$$x_0 = v, \qquad y_0 = 0, \qquad z_0 = 0, \qquad p_0 = 0, \qquad q_0 = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\partial y_0}{\partial v}=0, \qquad \frac{\partial z_0}{\partial v}=0, \qquad \frac{\partial p_0}{\partial v}=0, \qquad \frac{\partial q_0}{\partial v}=0.$$

La relation (38) deviendra donc

$$\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)_0 \frac{\partial x_0}{\partial v}=0, \qquad \text{ou} \qquad \alpha=0.$$

Ainsi, il faudra associer les caractéristiques pour lesquelles $\alpha=0$; quant à β, on pourra le prendre égal à l'unité.

La formule (38) permet de démontrer encore un autre résultat très essentiel. Si l'on associe toutes les caractéristiques tangentes en un point à l'intégrale singulière, elles formeront une surface intégrale. En effet, les valeurs initiales de p, q, x, y demeurant constantes, leurs dérivées par rapport à v seront nulles, et la condition (38) sera satisfaite.

Cette surface intégrale, formée par toutes les caractéristiques passant en un point, joue le rôle des intégrales complètes dans la méthode des enveloppes, et il sera bon que nous en disions quelques mots.

Reprenons l'équation aux dérivées partielles, écrite sous la forme

$$z=\mathrm{A}\frac{p^2}{2}+\mathrm{B}pq+\mathrm{C}\frac{q^2}{2}+\cdots$$

et considérons les caractéristiques qui passent à l'origine des coordonnées. Nous avons vu que, si l'on pose

$$\frac{dx}{\mathrm{P}}=\cdots=\frac{du}{u}, \tag{39}$$

x, y, z, p, q sont fonctions développables de u données par les formules

$$\left\{\begin{aligned} &p=\alpha u+\cdots && q=\beta u+\cdots \\ &x=(\mathrm{A}\alpha+\mathrm{B}\beta)\,u+\cdots && y=(\mathrm{B}\alpha+\mathrm{C}\beta)\,u+\cdots \\ &z=\left(\frac{\mathrm{A}\alpha^2}{2}+\mathrm{B}\alpha\beta+\frac{\mathrm{C}\beta^2}{2}\right)u^2+\cdots \end{aligned}\right. \tag{40}$$

α et β étant deux constantes arbitraires. Je dis d'abord que x, y, z

ne dépendent que des produits αu, βu. En effet, α et β étant les valeurs initiales de $\frac{dp}{du}, \frac{dq}{du}$, si l'on change u en hu, elles sont changées en $\frac{\alpha}{h}, \frac{\beta}{h}$. D'ailleurs, comme le seul rapport $\frac{du}{u}$ entre dans les formules (39), il faut que les valeurs de x, y, z, p, q ne changent pas et, par conséquent, qu'elles ne dépendent que des produits αu, βu.

Or la forme des équations (40) nous permet de reconnaître que des deux premières on pourra toujours tirer αu, βu en fonction de p et de q et les porter dans x, y, z. Donc :

Pour l'intégrale formée par les caractéristiques passant en un point de l'intégrale singulière, x, y, z sont toujours des fonctions développables suivant les puissances de p et de q.

Les premiers termes des valeurs de x, y, z seront

$$x = Ap + Bq + \cdots \qquad y = Bp + Cq + \cdots \qquad z = \frac{Ap^2}{2} + Bpq + \frac{Cq^2}{2}.$$

Donc, si l'on a $AC - B^2 \gtrless 0$, on pourra tirer des deux premières de ces équations p et q en fonction de x et de y et, par suite, développer z suivant les puissances de x et de y.

Mais si $AC - B^2 = 0$, z ne sera plus développable suivant les puissances de x et de y; l'intégrale obtenue aura une singularité d'une nature assez compliquée à son point de contact avec l'intégrale singulière.

On peut caractériser la singularité obtenue en disant qu'elle est la réciproque d'un point parabolique ordinaire.

§ 30. DE LA SOLUTION SINGULIÈRE DANS LE CAS D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES.

Les résultats obtenus dans le cas de deux variables indépendantes s'étendent sans difficulté aux équations aux dérivées partielles contenant un nombre quelconque de variables.

Imaginons que, par la transformation déjà indiquée, on ait ramené la solution singulière à être représentée par l'équation

$$z = 0.$$

Alors on devra avoir

$$P_1 = 0, \quad \ldots, \quad P_n = 0, \quad X_1 = 0, \quad \ldots, \quad X_n = 0,$$

pour $z = p_1 = \ldots = p_n = 0$, et, par conséquent, si nous supposons encore $Z \gtrless 0$, on pourra résoudre l'équation aux dérivées partielles par rapport à z et écrire

$$z = \varphi(p_1, \ldots, p_n, \quad x_1, \ldots, x_n), \tag{41}$$

φ étant une série dont tous les termes sont au moins du second degré par rapport à $p_1, \ldots, p_n$, puisque leurs dérivées doivent s'annuler pour des valeurs nulles de $p_1, \ldots, p_n$. Si cette série est convergente pour les valeurs de $x_1, \ldots, x_n$ voisines de quantités $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, en remplaçant x_i par $x_i + \alpha_i$ on la ramènera à être convergente pour des valeurs suffisamment petites des variables x_i. On peut donc, par cette substitution, analogue à la translation des axes dans le cas de deux variables indépendantes, ramener tous les cas possibles à celui où la série φ est convergente pour des valeurs suffisamment petites des quantités x_i, p_k.

Par conséquent, le raisonnement déjà employé à l'article précédent prouvera que les équations de la caractéristique

$$\frac{dx_1}{P_1} = \ldots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dp_1}{p_1 - X_1} = \ldots = \frac{dp_n}{p_n - X_n},$$

où P_i, X_k désignent les dérivées de la fonction φ, ont encore des solutions développables en série, pourvu qu'on ait la précaution de prendre pour la valeur commune des rapports précédents, non dt, mais $\frac{du}{u}$. Soient

$$u\frac{dx_i}{du} = P_i, \qquad u\frac{dp_i}{du} = p_i - X_i$$

les équations ainsi obtenues. Elles donnent naissance à des déve-

loppements en série qui sont de la forme

$$(42)\qquad \begin{cases} p_1 = \alpha_1 u + \dots & x_1 = x_1^0 + H_1 u + \dots \\ p_2 = \alpha_2 u + \dots & x_2 = x_2^0 + H_2 u + \dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n = \alpha_n u + \dots & x_n = x_n^0 + H_n u + \dots \\ z = \dfrac{H u^2}{2} + \dots & \end{cases}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ étant n constantes arbitraires, $x_1^0, \dots, x_n^0$ désignant les valeurs initiales de $x_1, \dots, x_n$. Il est encore évident que, les équations différentielles n'étant pas changées quand on y remplace u par hu, les développements précédents ne contiennent que les combinaisons $\alpha_1 u, \dots, \alpha_n u$.

Cela posé, supposons qu'on veuille associer les caractéristiques précédentes de manière à obtenir une intégrale. L'équation (15)

$$d(\delta z - p_1 \delta x_1 - \dots - p_n \delta x_n) + Z dt (\delta z - p_1 \delta x_1 - \dots - p_n \delta x_n) = 0$$

nous donnera ici, en mettant $\frac{du}{u}$ à la place de dt et en intégrant,

$$\delta z - p_1 \delta x_1 - \dots - p_n \delta x_n = C u.$$

C est une constante dont on trouvera facilement la valeur en cherchant le coefficient de u dans le premier membre. Ce coefficient est

$$C = -\alpha_1 \delta x_1^0 - \dots - \alpha_n \delta x_n^0.$$

Ainsi, pour que les caractéristiques associées forment une intégrale, il faudra que les constantes arbitraires α_i, x_i^0 satisfassent identiquement à la relation différentielle

$$(43)\qquad \alpha_1 \delta x_1^0 + \dots + \alpha_n \delta x_n^0 = 0.$$

Or il y a plusieurs manières de vérifier cette équation. D'abord

on peut supposer que, pour toutes les caractéristiques associées, les valeurs de $x_1^0, \ldots, x_n^0$ soient les mêmes. Alors on a

$$\delta x_1^0 = 0, \quad \ldots, \quad \delta x_n^0 = 0,$$

et l'équation (43) est satisfaite. La solution ainsi obtenue correspond à celle qui, dans le cas de deux variables, est formée des caractéristiques passant en un point. Les formules (42) nous montrent qu'on peut alors exprimer $\alpha_1 u, \ldots, \alpha_n u$ en fonction de $p_1, \ldots, p_n$ et obtenir par conséquent $z, x_1, \ldots, x_n$ développées suivant les puissances de $p_1, p_2, \ldots, p_n$. C'est le résultat déjà rencontré pour le cas de deux variables indépendantes.

Mais on peut aussi intégrer l'équation (43) en établissant un nombre quelconque de relations entre $x_1^0, \ldots, x_n^0$. Nous supposerons que ces relations soient au nombre de $k-1$ et qu'elles aient été écrites sous la forme suivante

$$\begin{aligned} &x_1^0 - f_1(x_k^0, \ldots, x_n^0) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_{k-1}^0 - f_{k-1}(x_k^0, \ldots, x_n^0) = 0. \end{aligned}$$

On pourra toujours substituer aux variables $x_1, \ldots, x_{k-1}$ les suivantes

$$(43\ bis) \qquad \begin{cases} x_1' = x_1 - f_1(x_k, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{k-1}' = x_{k-1} - f_{k-1}(x_k, \ldots, x_n) \end{cases}$$

et, par ce changement de variables, on aura ramené le système des relations entre les valeurs initiales à la forme simple

$$x_1^0 = 0, \quad \ldots, \quad x_{k-1}^0 = 0.$$

On aura alors

$$\delta x_1^0 = \ldots = \delta x_{k-1}^0 = 0,$$

et la relation (43) se réduira à la suivante :

$$\alpha_k \delta x_k^0 + \ldots + \alpha_n \delta x_n^0 = 0.$$

Cette équation devant être vérifiée, quels que soient $\delta x_k^0, \ldots, \delta x_n^0$, il faut que l'on ait

$$\alpha_k = \ldots = \alpha_n = 0.$$

Alors les formules (42) nous montrent que l'on a

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_1 u + \ldots & x_k &= x_k^0 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots \\ p_{k-1} &= \alpha_{k-1} u + \ldots & x_n &= x_n^0 + \ldots \end{aligned}$$

et, par conséquent, on pourra tirer de ces formules $\alpha_1 u, \ldots, \alpha_{k-1} u, x_k^0, \ldots, x_n^0$, et les développer suivant les puissances de $p_1, \ldots, p_{k-1}, x_k, \ldots, x_n$. En substituant ensuite dans les formules relatives aux autres variables, on voit que l'on pourra développer

$$z, x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, p_k, \ldots, p_n,$$

suivant les puissances des variables

$$p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, x_k, \ldots, x_n.$$

Toutefois, cette proposition ne paraît établie que pour l'équation aux dérivées partielles que l'on obtient en faisant le changement de variables défini par les formules (43 *bis*), et qui ramène les relations entre les valeurs initiales à la forme simple

$$x_1^0 = 0, \ldots, x_{k-1}^0 = 0.$$

Mais il est aisé de reconnaître qu'il s'applique à l'équation aux dérivées partielles primitive.

En effet, soient $p_1', p_2', \ldots, p_n'$ les dérivées de z après que l'on aura fait le changement de variables indiqué. Nous venons de démontrer que

$$z, x_1', \ldots, x_{k-1}', p_k', \ldots, p_n'$$

sont développables suivant les puissances de

$$p_1', \ldots, p_{k-1}', x_k, \ldots, x_n.$$

Or, on a

$$dz = p_1' dx_1' + \ldots + p_{k-1}' dx_{k-1}' + p_k' dx_k + \ldots + p_n' dx_n;$$

si l'on remplace $dx'_1, \ldots, dx'_{k-1}$ par leurs valeurs déduites des formules (43 *bis*), on aura

$$dz = p'_1(dx_1 - df_1) + \ldots + p'_{k-1}(dx_{k-1} - df_{k-1}) + p'_k dx_k + \ldots + p'_n dx_n,$$

ce qui donne

$$p_1 = p'_1, \ \ldots, \ p_{k-1} = p'_{k-1}$$

$$p_k = p'_k - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_k} - \ldots - p_{k-1} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_k}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = p'_n - p_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} - \ldots - p_{k-1} \frac{\partial f_{k-1}}{\partial x_n}.$$

On voit donc : 1° que, $p'_k, \ldots, p'_n$ étant développables suivant les puissances de $p'_1, \ldots, p'_{k-1}, x_k, \ldots, x_n$, ou, ce qui est la même chose, suivant les puissances de $p_1, \ldots, p_{k-1}, x_k, \ldots, x_n$, il en sera de même de $p_k, \ldots, p_n$; 2° que, $x'_1, \ldots, x'_{k-1}$ étant développables suivant les puissances des mêmes variables, il en sera de même de

$$x_1 = x'_1 + f_1(x_k, \ldots, x_n), \ \ldots, \ x_k = x'_k + f_k(x_k, \ldots, x_n).$$

Donc, avant le changement de variables,

$$z, x_1, \ldots, x_{k-1}, p_k, \ldots, p_n$$

sont bien développables suivant les puissances de

$$p_1, \ \ldots, p_{k-1}, x_k, \ \ldots, \ x_n,$$

et nous sommes ainsi conduits à la proposition suivante :

Il y a, outre la solution singulière, n classes d'intégrales, la $(k-1)^{ième}$ *classe étant formée d'intégrales pour lesquelles*

$$z, x_1, \ldots, x_{k-1}, p_k, \ldots, p_n$$

sont développables en série suivant les puissances de

$$p_1, \ldots, p_{k-1}, x_k, \ldots, x_n$$

et qui sont tangentes à la solution singulière en tous les points d'un lieu défini par $k-1$ équations.

Pour l'étude ultérieure de ces solutions, il ne sera pas inutile de donner plus de précision aux formules (42). Écrivons l'équation aux dérivées partielles

$$z = f(x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) + \psi,$$

f contenant *tous* les termes du second degré en $p_1, \ldots, p_n$.

Les formules relatives à une caractéristique pourront s'écrire, en faisant $u = 1$,

$$(44)\quad \begin{cases} p_1 = \alpha_1 + \cdots & x_1 - x_1^0 = \dfrac{\partial f_0}{\partial \alpha_1} + \cdots \\ p_2 = \alpha_2 + \cdots & x_2 - x_2^0 = \dfrac{\partial f_0}{\partial \alpha_2} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n = \alpha_n + \cdots & x_n - x_n^0 = \dfrac{\partial f_0}{\partial \alpha_n} + \cdots \\ z = f_0 + \cdots & \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(45)\qquad f_0 = f(x_1^0, \ldots, x_n^0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Rappelons qu'entre les arbitraires α_i, x_k^0 devra avoir lieu l'identité différentielle

$$\alpha_1 \delta x_1^0 + \ldots + \alpha_n \delta x_n^0 = 0.$$

§ 31. D'UNE AUTRE MÉTHODE POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

La théorie précédente repose tout entière sur l'emploi des caractéristiques. Mais on peut aussi déterminer directement les intégrales par une méthode qui sera applicable aux équations aux dérivées partielles de tous les ordres.

Soit l'équation

$$(46)\qquad F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

et supposons qu'elle admette une intégrale finie et continue. Il est clair que, si l'on fait $x_1 = x_1^0$, z se réduira, au moins en général, à une fonction déterminée de $x_2, \ldots, x_n$. Réciproquement, je dis qu'il y aura une intégrale développable se réduisant, pour $x_1 = x_1^0$, à une fonction φ de $x_2, \ldots, x_n$, sous les conditions suivantes :

1° Cette fonction φ sera supposée développable dans le voisinage des valeurs $x_2^0, \ldots, x_n^0$ de $x_2, \ldots, x_n$. Soit p_i^0 la dérivée de φ par rapport à x_i et φ^0 la valeur de φ pour $x_k = x_k^0$.

2°- L'équation

$$F(\varphi^0, x_1^0, \ldots, x_n^0, p_1^0, \ldots, p_n^0) = 0$$

donnera une valeur de p_1^0 pour laquelle la dérivée $\frac{\partial F}{\partial p_1^0}$ ne sera pas nulle, et la fonction F sera développable pour

$$z = \varphi^0, \qquad x_i = x_i^0, \qquad p_i = p_i^0.$$

En effet, sous ces conditions, l'équation (46) définit p_1 comme fonction développable de $z, x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n$

$$p_1 = f(z, x_1, \ldots, x_n, p_2, \ldots, p_n),$$

et le théorème II des *Préliminaires* démontre l'existence d'une fonction z satisfaisant aux conditions indiquées et développable en série de puissances.

Mais la proposition précédente est loin de résoudre toutes les questions qu'on peut se proposer sur l'existence de l'intégrale. Par exemple, dans le cas de deux variables, les conditions auxquelles nous assujettissons l'intégrale expriment que la surface qui la représente passe par une courbe plane, située dans un plan perpendiculaire à l'axe des x. Cette dernière condition a l'inconvénient de dépendre du choix des axes; elle est d'ailleurs extrêmement particulière. Ainsi, elle ne donne pas la solution de la question suivante : Trouver une intégrale passant par une courbe donnée plane ou gauche.

Pour obtenir toute la généralité voulue, il suffira de faire le changement de variables suivant, dont la théorie ne présente

aucune difficulté. Supposons que l'on recherche l'intégrale dont l'équation sera vérifiée identiquement lorsqu'on établira entre les variables deux relations quelconques

$$z = f(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$
$$x_1 = f_1(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

On substituera aux variables z, x_1 les deux suivantes

$$z' = z - f(x_2, \ldots, x_n),$$
$$x_1' = x_1 - f(x_2, \ldots, x_n),$$

et l'on sera ainsi ramené du problème général au suivant : Trouver une fonction satisfaisant à une équation aux dérivées partielles et se réduisant à zéro pour $x_1 = 0$. Le problème étant ramené à cette forme simple, nous allons le discuter complètement.

Soit

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

l'équation proposée, dont nous désignerons toujours la différentielle par

$$Z dz + P_1 dp_1 + \ldots + X_1 dx_1 + \ldots = 0.$$

D'après le théorème déjà rappelé, si, pour $z = x_1 = \ldots = x_n = 0$, P_1 n'est pas nulle, il y aura une solution développable suivant les puissances de $x_1, \ldots, x_n$.

Supposons maintenant que P_1 soit nulle et faisons la substitution

$$z' = z - p_1 x_1 - p_2 x_2.$$

On déduit de là

$$(47) \qquad dz' = -x_1 dp_1 - x_2 dp_2 + p_3 dx_3 + \ldots + p_n dx_n.$$

Prenons comme variables indépendantes

$$p_1, p_2, x_3, \ldots, x_n.$$

Nous aurons

$$z = z' - p_1 \frac{\partial z'}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial z'}{\partial p_2}.$$

Les conditions initiales posées nous donnaient, pour $x_1 = 0$,

$$z = 0,$$

et par suite

$$p_2 = 0, \ \ldots, \ p_n = 0.$$

Nous aurons donc avec la nouvelle fonction, pour $p_2 = 0$,

$$z' = 0,$$

quelles que soient les autres variables $p_1, x_3, \ \ldots, \ x_n$.

La nouvelle équation aux dérivées partielles deviendra

$$F\left(z' - p_1 \frac{\partial z'}{\partial p_1} - p_2 \frac{\partial z'}{\partial p_2}, -\frac{\partial z'}{\partial p_1}, -\frac{\partial z'}{\partial p_2}, \ldots\right) = 0,$$

et la dérivée par rapport à $\frac{\partial z'}{\partial p_2}$ du premier membre sera

$$-X_2 - Zp_2;$$

si donc elle n'est pas nulle, z' et par conséquent z seront développables suivant les puissances de

$$p_1, p_2, x_3, \ \ldots, \ x_n.$$

Nous avons donc la proposition suivante :

Quand P_1 *sera nul, si* $X_k + Zp_k$, k *étant différent de* 1, *n'est pas nulle,* $z, x_k, x_1, p_2, \ \ldots, \ p_{k-1}, p_{k+1}, \ \ldots, \ p_n$ *seront développables suivant les puissances de*

$$p_1, x_2, \ \ldots, x_{k-1}, p_k, x_{k+1}, \ \ldots, x_n.$$

Mais il y a encore un autre point, déjà signalé au paragraphe 24, et dans lequel la théorie de Cauchy peut être complétée. z étant une fonction de $x_1, \ldots, x_n$, il peut se faire que la seule hypothèse $x_1 = x_1^0$ introduise entre ces variables plusieurs relations. Nous avons déjà cité l'exemple de l'intégrale qui, dans le cas de deux variables, serait engendrée par toutes les caractéristiques passant en un point $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. La seule hypothèse $x = x_0$ exigerait que l'on eût à la fois $y = y_0$, $z = z_0$.

Par un changement de variables nous ramènerons encore tous les cas possibles à un seul, de la manière suivante :

Supposons que l'équation de l'intégrale cherchée doive être vérifiée identiquement quand on établit entre les variables les k équations suivantes :

$$z = f(x_k, \ldots, x_n),$$
$$x_1 = f_1(x_k, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_{k-1} = f_{k-1}(x_k, \ldots, x_n).$$

On substituera aux variables $z, x_1, \ldots, x_{k-1}$ les suivantes :

$$z' = z - f(x_k, \ldots, x_n),$$
$$x'_1 = x_1 - f_1(x_k, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x'_{k-1} = x_{k-1} - f_{k-1}(x_k, \ldots, x_n),$$

et l'on sera ramené avec les nouvelles variables au problème suivant : Chercher une intégrale dont l'équation soit vérifiée, quels que soient $x_k, \ldots, x_n$, quand on a

$$z = 0, \qquad x_1 = 0, \ \ldots, \ x^0_{k-1} = 0.$$

Alors la différentielle de z

$$dz = p_1\, dx_1 + \ldots + p_n\, dx_n$$

devant être nulle, quels que soient $x_k, \ldots, x_n$, quand on a $x_1 = \ldots = x_{k-1} = 0$, il faut que l'on ait

$$p_k\, dx_k + \ldots + p_n\, dx_n = 0,$$

quels que soient $dx_k, \ldots, dx_n$, ce qui donne

$$p_k = \ldots = p_n = 0.$$

Prenons comme variables indépendantes

$$x_1, p_2, p_3, \ldots, p_{k-1}, x_k, \ldots, x_n,$$

et introduisons la nouvelle fonction

$$u = z - p_2 x_2 - \ldots - p_{k-1} x_{k-1}; \tag{48}$$

on aura

$$du = p_1 dx_1 - x_2 dp_2 - \ldots - x_{k-1} dp_{k-1} + p_k dx_k + \ldots + p_n dx_n;$$

u sera donc une fonction des variables indépendantes qui, pour $x_1 = 0$, devra se réduire à zéro, quelles que soient les autres variables indépendantes. Nous sommes donc ramenés au problème déjà traité en premier lieu. Du reste, comme on a

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = p_1, \ \dfrac{\partial u}{\partial x_k} = p_k, \ \ldots, \ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = p_n \\ \dfrac{\partial u}{\partial p_2} = -x_2, \ \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial p_{k-1}} = -x_{k-1}, \end{cases} \tag{49}$$

on formera aisément l'équation à laquelle satisfait la fonction u, et l'on reconnaîtra par un calcul des plus simples que, pourvu que P_1 soit différent de zéro, elle donne pour u une fonction développable de

$$x_1, p_2, \ldots, p_{k-1}, x_k, \ldots, x_n.$$

Les formules (48), (49) feront connaître les autres variables.

Nous pouvons avoir ainsi ces intégrales nouvelles, que nous avons introduites avec M. Lie, et qui sont représentées par plus d'une relation entre $z, x_1, \ldots, x_n$. Soit, par exemple, l'équation

$$c = ap + bq + z - px - qy,$$

qui exprime que le plan tangent à une surface passe par un point fixe. Cherchons l'intégrale telle que, pour $x = 0$, l'on ait

$$y = 0, \qquad z = 0.$$

L'application des méthodes précédentes conduit au résultat suivant :

Posons

$$z - qy = u,$$

et prenons pour variables indépendantes x et q; nous trouverons pour u l'équation

$$u - c + (a - x)\frac{\partial u}{\partial x} + bq = 0.$$

L'intégrale de cette équation se réduisant à 0 pour $x = 0$ est

$$u = x\frac{c - bq}{a},$$

d'où l'on déduit

$$p = \frac{c - bq}{a}$$

$$ay - bx = 0, \qquad cx - az = 0,$$

en sorte que x, y, z sont liées par les deux relations

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

qui représentent la droite passant par le point fixe et l'origine. Les éléments à deux variables indépendantes dont se compose l'intégrale sont *un plan quelconque passant par cette droite, associé à un point quelconque de la droite.*

§ 32. EXAMEN DES SINGULARITÉS DES INTÉGRALES, CORRESPONDANT À L'ÉTUDE DES SINGULARITÉS DES CARACTÉRISTIQUES.

Après avoir examiné les intégrales en général, il sera utile d'étudier les singularités qu'elles peuvent présenter. Mais nous nous contenterons de traiter le cas de deux variables, où les résultats obtenus pourront s'interpréter géométriquement.

Nous allons d'abord étudier la forme des intégrales qui, dans le cas général, sont tangentes en un point donné à un plan donné. Le résultat obtenu nous servira ensuite de terme de comparaison.

Prenons le point pour origine, le plan donné pour plan des xy

et cherchons les premiers termes du développement de l'intégrale. En admettant que l'intégrale est développable, nous n'excluons que les seules intégrales suivantes : 1° celle qui est formée des caractéristiques passant au point; 2° celles qui seraient assujetties à contenir une courbe tangente à la caractéristique dont le premier élément est situé dans le plan des xy.

Soit

$$0 = ax + by + cz + \alpha p + \beta q + \dots \tag{50}$$

l'équation proposée. On peut supposer $\beta = 0$, ce qui revient à admettre que l'axe des x est la tangente à la caractéristique. Le calcul des premiers termes de z n'offre aucune difficulté. On trouve

$$-\alpha z = \frac{ax^2}{2} + bxy + \frac{hy^2}{2} + \dots, \tag{51}$$

h étant une constante arbitraire. On voit que l'intégrale a un point ordinaire à l'origine, toutes les intégrales différentes étant osculatrices les unes aux autres dans la direction de la caractéristique, comme cela doit être, puisqu'elles contiennent cette courbe.

Passons maintenant au cas où l'on aura

$$P = 0, \qquad Q = 0, \qquad X + pZ \gtrless 0, \qquad Y + qZ \gtrless 0.$$

Si l'on applique les résultats de l'article précédent, et que l'on prenne comme fonction $u = px + qy - z$ et comme variables indépendantes p et q, on verra sans peine que u et par conséquent x, y, z sont développables suivant les puissances de p et de q.

La forme de l'équation aux dérivées partielles est alors

$$0 = ax + by + cz + p(a'x + b'y + c'z) + q(\qquad) + \frac{Ap^2}{2} + Bpq + \frac{Cq^2}{2} + \dots$$

ou, en mettant en évidence les termes de degré moindre,

$$0 = ax + by + A\frac{p^2}{2} + Bpq + C\frac{q^2}{2} + \dots$$

a et b ne pouvant être nuls en même temps, car alors on aurait

$$X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0.$$

Il est clair qu'on peut choisir les axes de telle manière que b soit nul, et l'équation prend la forme

$$x = A\frac{p^2}{2} + Bpq + C\frac{q^2}{2} + \cdots \tag{52}$$

Il existe une première intégrale, qui, si l'on réduisait l'équation (52) aux termes écrits, s'obtiendrait en supposant $q = 0$, ce qui donnerait

$$p = \sqrt{\frac{2x}{A}} \qquad z = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{A}}x^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

Nous retrouvons ainsi, quoique par une méthode peu rigoureuse, les intégrales à ligne de rebroussement signalées à l'article 27.

Voyons maintenant les intégrales générales. On a $x = \frac{\partial u}{\partial p}$ et, par suite, l'équation (52) devient

$$\frac{\partial u}{\partial p} = A\frac{p^2}{2} + Bpq + C\frac{q^2}{2} + \cdots$$

En intégrant on a donc, pour les premiers termes de u,

$$u = A\frac{p^3}{6} + B\frac{p^2q}{2} + C\frac{pq^2}{2} + H\frac{q^3}{6} + \cdots$$

H désignant une constante arbitraire, et, par suite,

$$(53)\quad \begin{cases} u = A\frac{p^3}{6} + B\frac{p^2q}{2} + C\frac{pq^2}{2} + H\frac{q^3}{6} + \cdots \\ x = A\frac{p^2}{2} + Bpq + C\frac{q^2}{2} + \cdots \\ y = \frac{\partial u}{\partial q} = B\frac{p^2}{2} + Cpq + H\frac{q^2}{2} + \cdots \\ z = A\frac{p^3}{3} + Bp^2q + Cpq^2 + H\frac{q^3}{3} + \cdots = \frac{2}{3}(px + qy) + \cdots \end{cases}$$

Si entre ces équations on veut éliminer p et q, le résultat est compliqué. Ainsi, en chaque point de la surface (R) lieu des rebrous-

sements des caractéristiques, celles des intégrales qui contiennent la caractéristique ayant un rebroussement ont une singularité d'ordre assez élevé.

Je n'examinerai pas le cas où l'on a

$$X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0, \qquad P \gtrless 0, \qquad Q \gtrless 0.$$

Cette hypothèse se ramène à la précédente au moyen d'une transformation par polaires réciproques. On aura alors des surfaces représentées par l'équation

$$z = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + hy^3,$$

c'est-à-dire ayant un contact du deuxième ordre avec leur plan tangent.

Je ne traiterai pas non plus le cas où l'on a

$$X + pZ = 0, \qquad Y + qZ = 0, \qquad P = 0, \qquad Q = 0.$$

Comme l'étude de cette question est étrangère à notre sujet, j'arrive au point essentiel, à l'examen du cas où il y a une solution singulière.

§ 33. DES INTÉGRALES TANGENTES À L'INTÉGRALE SINGULIÈRE.

Supposons toujours que la solution singulière soit le plan des xy et que la dérivée Z du premier membre par rapport à z soit différente de zéro. L'équation aux dérivées partielles, résolue par rapport à z, prendra la forme

$$2z = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + \psi(p, q, x, y), \tag{54}$$

ψ étant une série dont tous les termes sont du second degré au moins en p et en q, mais dont les termes du second degré s'annulent pour $x = 0$, $y = 0$.

Considérons d'abord l'intégrale formée de toutes les caractéristiques passant en un point, à l'origine par exemple, intégrale dont l'existence a été démontrée à l'article 28 et pour laquelle x, y, z

sont des fonctions développables de p et de q, dont les premiers termes ont été donnés à l'article 29 et sont

$$x = Ap + Bq + \dots$$
$$y = Bp + Cq + \dots$$
$$z = \frac{Ap^2}{2} + Bpq + \frac{Cq^2}{2} + \dots$$

Nous voyons que, toutes les fois que $AC - B^2$ sera différent de zéro, on pourra, des formules relatives à x et à y, tirer p et q en fonctions développables suivant les puissances de x et de y et, par conséquent, développer z suivant les mêmes variables.

Nous avons donc démontré la proposition suivante :

Toutes les fois que l'équation aux dérivées partielles admet une intégrale singulière pour laquelle on a $Z \gtrless 0$, *il existe des intégrales tangentes en un seul point à la solution singulière et formées des caractéristiques tangentes en ce point, intégrales qui joueront par conséquent le rôle des intégrales complètes de Lagrange.*

Si $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\, \partial q}\right)^2 = 0$, *ces intégrales existeront toujours; mais elles auront un point singulier à leur point de contact avec l'intégrale singulière, et, par conséquent, ne donneront pas z fonction développable de x et de y.*

Traitons maintenant des intégrales générales, de celles qui sont tangentes à la solution singulière en tous les points d'une courbe, que nous ramènerons à être l'axe des y par les transformations déjà employées.

Les premiers termes des développements qui définissent les caractéristiques tangentes à la solution singulière, dans le voisinage de l'origine ont déjà été donnés. On a

$$p = \alpha u + \dots \qquad x - x_0 = (A\alpha + B\beta)\, u + \dots$$
$$q = \beta u + \dots \qquad y - y_0 = (B\alpha + C\beta)\, u + \dots$$

Si nous voulons que ces caractéristiques engendrent une intégrale,

il faut que l'on ait, entre les valeurs initiales, la relation différentielle

$$\alpha\delta x_0 + \beta\delta y_0 = 0.$$

Dans le cas actuel, la courbe de contact étant l'axe des y, on a $\delta x_0 = 0$, et il faut prendre $\beta = 0$, ce qui donne

$$p = \alpha u + \dots \qquad x = A\alpha u + \dots$$
$$q = 0 + Hu^2 + \dots \qquad y = y_0 + B\alpha u + \dots$$

On voit que, toutes les fois que A ne sera pas nul, on pourra tirer u et y_0 en fonctions développables de x et de y, et, par conséquent, développer z suivant les puissances de x et de y. Or A ne peut être nul que pour des courbes de contact exceptionnelles, à moins que, avant le changement de variable qui a transformé la courbe de contact en une droite, l'axe des y, la forme

$$A\frac{p^2}{2} + Bpq + C\frac{q^2}{2}$$

ne soit identiquement nulle. Mais, dans tous les cas, αu et y_0 peuvent être déduites des équations précédentes, en fonctions développables de p et de y. Nous avons donc la proposition qui suit :

Toutes les fois qu'il existe une intégrale singulière pour laquelle on a $Z \gtrless 0$, *il y a une infinité de solutions jouant le rôle des intégrales générales de Lagrange et tangentes à l'intégrale singulière en tous les points d'une courbe.*

Mais si, en un point ou sur toute l'étendue de la ligne de contact, on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial p\,\partial q} = 0,$$

ces intégrales, sans cesser d'exister, auront des points singuliers à leur contact avec l'intégrale singulière.

En chaque point de l'intégrale singulière, il y a, on s'en assu-

rera par un calcul des plus simples, deux directions possibles de la courbe de contact, qui, prises pour axes des y, feraient évanouir le coefficient A. Par suite, si la courbe de contact était tangente à l'une ou l'autre de ces deux directions, l'intégrale générale ne serait plus développable et aurait une singularité. C'est la confirmation des résultats donnés à l'article 10 de notre première partie. Nous avons vu, en effet, qu'il existe des intégrales ayant une ligne de rebroussement sur la solution singulière, et qui sont analogues aux surfaces développables circonscrites à une surface donnée en tous les points d'une ligne asymptotique.

On peut donner de belles propriétés des solutions générales dont nous venons de démontrer l'existence, en effectuant une transformation remarquable de l'équation aux dérivées partielles; et cette transformation nous fera retrouver, en l'étendant aux équations aux dérivées partielles, un curieux et intéressant résultat établi par Poisson[1], relativement aux équations différentielles ordinaires.

Quand l'intégrale singulière est le plan des xy, l'équation proposée, sans même qu'il soit nécessaire de la résoudre, est de la forme

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

F étant une fonction dont les dérivées P, Q, X, Y doivent s'annuler pour $p = q = z = 0$. On pourra donc la mettre sous la forme

$$(55) \quad 2\varphi(x, y)z + Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 + Dpz + Eqz + Fz^2 = 0,$$

A, B, C, D, E, F étant des fonctions quelconques. L'équation précédente comprend du reste, comme cas particulier, la forme sous laquelle se présente l'équation résolue par rapport à z.

Cela posé, faisons la substitution

$$z = \frac{z'^2}{2},$$

[1] Poisson. Sur les solutions particulières des équations différentielles et des équations aux différences. (*Journal de l'École polytechnique*, 13e cahier, p. 70.)

qui donne, en appelant p', q' les dérivées de z',

$$p = p'z', \qquad q = q'z',$$

notre équation deviendra

$$z'^2\left[2\varphi(x,y) + Ap'^2 + 2Bp'q' + Cq'^2 + Dp'\frac{z'}{2} + Eq'\frac{z'}{2} + F\frac{z'^2}{4}\right] = 0.$$

La solution singulière est mise en facteur. Quant à la nouvelle équation obtenue en supprimant ce facteur, elle ne présente plus de singularité en aucun point de la solution singulière. Pour $z' = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, elle devient

$$2\varphi(x_0 y_0) + A_0 p'^2 + 2B_0 p'q' + C_0 q'^2 = 0,$$

A_0, B_0, C_0 étant des fonctions de x_0, y_0. Ainsi, *pour chaque point du plan des xy, le cône* (T) *des tangentes aux caractéristiques devient un cône du second degré, et la solution singulière a été complètement éliminée; elle ne satisfait plus à l'équation transformée.*

Il serait facile de déduire de cette proposition une nouvelle démonstration des propriétés des caractéristiques, qui sont, comme nous l'avons vu à l'article 10, la généralisation de celles des tangentes conjuguées.

Mais il est un fait plus important, que l'on peut conclure de l'analyse précédente.

Les anciennes intégrales générales, celles qui étaient tangentes en tous les points d'une courbe à la solution singulière, deviennent maintenant des intégrales développables de la nouvelle équation. On a donc le théorème suivant :

S'il existe une solution singulière

$$z = f(x,y)$$

pour laquelle on ait $Z \gtrless 0$, *les intégrales qui lui sont tangentes en tous les points d'une courbe sont représentées par l'équation*

$$z = f(x,y) + z'^2,$$

z' étant une série convergente ordonnée suivant les puissances de x et de y.

Cette proposition était loin d'être évidente. Car toute série ordonnée suivant les puissances de deux variables et dont le premier terme n'est pas une constante n'est pas nécessairement le carré d'une autre série.

L'intégrale complète donne lieu à un théorème du même genre; on verra facilement qu'on peut donner à son équation la forme

$$z = f(x, y) + u^2 + v^2,$$

où u et v sont deux séries de puissances entières. Je n'insiste pas sur ce résultat, qui sera confirmé plus tard et généralisé pour le cas d'un nombre quelconque de variables.

§ 34. DE LA SOLUTION SINGULIÈRE DANS LE CAS D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES INDÉPENDANTES.

Nous supposerons toujours que la solution singulière a été ramenée à la forme

$$z = 0,$$

et nous écrirons l'équation aux dérivées partielles

$$(56) \qquad z = \varphi(p_1, p_2, \ldots, p_n) + \psi(p_1, \ldots, p_n, x_1, \ldots, x_n),$$

φ étant une forme quadratique dont les coefficients sont des constantes, et ψ ayant tous ses termes du second degré au moins en $p_1, \ldots, p_n$, mais de telle manière que les termes qui sont seulement du second degré en $p_1, \ldots, p_n$ contiennent de plus en facteur une des variables $x_1, \ldots, x_n$.

Cela posé, les formules (44), relatives à une caractéristique quelconque, deviennent ici

$$(57) \qquad \begin{cases} p_1 = \alpha_1 + \ldots & x_1 = x_1^0 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n = \alpha_n + \ldots & x_n = x_n^0 + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} + \ldots \\ z = \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + \ldots \end{cases}$$

A la vérité, φ n'est pas identique à la fonction que nous avons désignée par f_0 dans les formules (44); pour avoir f_0, il faudrait ajouter à φ les termes de ψ qui, tout en étant du second degré par rapport à $p_1, \ldots, p_n$, contiennent l'une au moins des variables $x_1, \ldots, x_n$; mais ces termes étant de degrés supérieurs à ceux de φ, si l'on considère les variables x_i^0 comme infiniment petites, nous pouvons supposer qu'on les ait réunis aux termes non écrits dans les formules précédentes.

Pour avoir une surface intégrale, il faut établir entre les arbitraires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et les valeurs initiales $x_1^0, \ldots, x_n^0$ des relations telles que l'on ait identiquement

$$\alpha_1 \delta x_1^0 + \ldots + \alpha_n \delta x_n^0 = 0.$$

Ces points étant rappelés, considérons d'abord l'intégrale formée des caractéristiques qui passent au point

$$x_1^0 = x_2^0 = \ldots = x_n^0 = 0$$

de l'intégrale singulière. On a, dans ce cas,

$$x_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1} + \ldots, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n} + \ldots$$

Donc, si le déterminant des n fonctions linéaires

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_n}$$

n'est pas nul, ou si, ce qui revient au même, la forme φ n'est pas réductible à une somme de moins de n carrés, on pourra tirer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$, et, par conséquent, développer $z, p_1, \ldots, p_n$ suivant les puissances entières de $x_1, \ldots, x_n$. Dans tous les autres cas, l'intégrale existera encore puisque, comme nous l'avons déjà remarqué, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et, par conséquent, $z, x_1, \ldots, x_n$ peuvent se développer suivant les puissances de $p_1, \ldots, p_n$, mais elle aura des singularités à son élément de contact. Nous avons donc le théorème suivant :

Toutes les fois qu'il existera une solution singulière pour laquelle

on aura $Z \gtrless 0$, *il y aura une intégrale tangente en un élément de la solution singulière, et jouant, par conséquent, le rôle d'une intégrale complète ordinaire.*

Si la forme

$$\sum\sum \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} \alpha_i \alpha_k$$

est réductible à une somme de moins de n carrés, cette intégrale existera encore, mais elle ne sera plus développable suivant les puissances de $x_1, \ldots, x_n$.

Examinons maintenant les différentes classes d'intégrales dont nous avons reconnu l'existence à l'article 30, et qui sont tangentes à l'intégrale singulière en tous les éléments d'un lieu représenté par une ou plusieurs équations.

Supposons d'abord que l'on ait, par l'artifice employé à l'article 30, ramené les équations du lieu des éléments de contact à la forme

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \ \ldots, \ x_h = 0. \tag{58}$$

Pour simplifier la résolution de la question que nous avons à traiter, nous commencerons par effectuer une substitution linéaire, définie comme il suit :

Considérons la forme quadratique formée avec les variables $x_1, \ldots, x_h$

$$2f_1 = x_1^2 + \ldots + x_h^2, \tag{59}$$

et la forme quadratique qui figure dans l'équation (56)

$$\varphi(p_1, \ldots, p_n).$$

Il est évident que, de quelque manière que l'on transforme f_1 en une somme de carrés, on retrouvera, en égalant chacun de ces carrés à zéro, un système de relations équivalent aux équations (58) qui définissent le lieu de contact.

Or, lorsqu'on soumet les variables $x_1, \ldots, x_n$ à une substitution

linéaire, les dérivées $p_1, \ldots, p_n$ sont transformées par la substitution inverse. Il y aura donc, en général, au moins une substitution linéaire qui amènera f_1 et φ à des sommes de carrés [1].

Soit alors

$$2\varphi = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_\lambda^2 \tag{60}$$

l'expression de φ, λ étant généralement égal à n, mais pouvant lui être inférieur. La forme la plus générale que puisse prendre f_1 est alors

$$f_1 = a_1 x_1^2 + \ldots + a_\mu x_\mu^2 + a_{n-\mu'} x_{n-\mu'}^2 + \ldots + a_n x_n^2,$$

où les μ premiers carrés correspondent à des dérivées figurant dans φ, les autres à des dérivées qui disparaissent de φ. Le système (58) sera donc remplacé par le suivant

$$\begin{cases} x_1 = 0, \ \ldots, \ x_\mu = 0, \\ \\ x_{n-\mu'} = 0, \ \ldots, \ x_n = 0, \end{cases} \tag{61}$$

sur lequel nous allons raisonner. La condition

$$\alpha_1 \delta x_1^0 + \ldots + \alpha_\mu \delta x_\mu^0 + \ldots + \alpha_{n-\mu'} \delta x_{n-\mu'}^0 + \ldots + \alpha_n \delta x_n^0 = 0$$

n'assujettit

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_\mu, \alpha_{n-\mu'}, \ \ldots, \ \alpha_n$$

à aucune relation, mais elle ne sera satisfaite que si les quantités

$$\alpha_{\mu+1}, \ \ldots, \ \alpha_{n-\mu'-1}$$

sont nulles.

[1] Dans l'étude de la question si étendue qui nous occupe, nous laisserons de côté les cas exceptionnels où cette substitution linéaire n'existerait pas. C'est ce qui arriverait, par exemple, si les deux formes quadratiques étaient

$$f_1 = x_1^2, \qquad \varphi = p_1 p_2.$$

Les équations de la caractéristique deviennent donc

$$(62)\quad \begin{cases} p_1 = \alpha_1 + \cdots & x_1 = \alpha_1 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_\mu = \alpha_\mu + \cdots & x_\mu = \alpha_\mu + \cdots \\ p_{\mu+1} = 0 + \cdots & x_{\mu+1} = \overset{0}{x}_{\mu+1} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n-\mu'-1} = 0 + \cdots & x_{n-\mu'-1} = \overset{0}{x}_{n-\mu'-1} + \cdots \\ p_{n-\mu'} = \alpha_{n-\mu'} + \cdots & x_{n-\mu'} = 0 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n = \alpha_n + \cdots & x_n = 0 + \cdots \\ z = \dfrac{p_1^2 \cdots + p_\lambda^2}{2} + \cdots \end{cases}$$

On voit que l'on pourra déduire de ces formules

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu, \overset{0}{x}_{\mu+1}, \ldots, \overset{0}{x}_{n-\mu'-1}, \alpha_{n-\mu'}, \ldots, \alpha_n,$$

qui seront développables en séries ordonnées suivant les puissances de

$$p_1, \ldots, p_\mu, x_{\mu+1}, \ldots, x_{n-\mu'-1}, p_{n-\mu'}, \ldots, p_n;$$

mais on ne peut conclure de là que z sera toujours développable suivant les puissances de $x_1, \ldots, x_n$; car, les développements de $x_{n-\mu'}, \ldots, x_n$ ayant leurs premiers termes nuls et commençant par des termes du second degré, il ne sera pas possible d'obtenir pour $\alpha_{n-\mu'}, \ldots, \alpha_n$ des expressions développables suivant les puissances de $x_1, \ldots, x_n$. Il faut donc, pour que ce développement suivant les puissances de $x_1, \ldots, x_n$ soit possible, que les équations (61) de la courbe de contact contiennent seulement les variables pour lesquelles les dérivées correspondantes figurent dans φ.

Alors les équations de la courbe de contact seront

$$x_1 = 0, \ \ldots, \ x_\mu = 0, \qquad \mu \leq \lambda.$$

On aura, pour les caractéristiques,

$$(63)\quad \begin{cases} p_1 = \alpha_1 + \cdots & x_1 = \alpha_1 + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_\mu = \alpha_\mu + \cdots & x_\mu = \alpha_\mu + \cdots \\ p_{\mu+1} = 0 + \cdots & x_{\mu+1} = \overset{0}{x}_{\mu+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_n = 0 + \cdots & x_n = \overset{0}{x}_n + \cdots \\ z = \dfrac{p_1^2 + \cdots + p_\lambda^2}{2} + \cdots \end{cases}$$

et, par suite, les termes du second degré dans z prendront la forme très simple

$$z = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_\mu^2}{2} + \cdots$$

Nous obtenons donc la proposition suivante :

Si l'équation aux dérivées partielles [1]

$$\mathrm{F}(z, x_i, p_k) = 0$$

admet une solution singulière pour laquelle on a $\mathrm{Z} \gtrless 0$, *il y a, en dehors de l'intégrale singulière et de l'intégrale complète déjà étudiée,* $n - 1$ *classes d'intégrales, jouant le rôle des intégrales générales de Lagrange*

[1] A la vérité, ce théorème ainsi que le suivant paraissent démontrés seulement pour le cas où le lieu de contact est représenté par les équations particulières

$$x_1 = 0, \ \ldots, \ x_h = 0.$$

Mais on peut, comme nous l'avons déjà fait à l'article 30, ramener tous les autres

et tangentes à la solution singulière en tous les points d'un lieu représenté par une, deux, ..., $n-1$ équations.

Si la forme quadratique

$$\sum\sum \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} dp_i dp_k$$

est réductible à une somme de λ carrés, toutes les intégrales pour lesquelles le lieu de contact serait représenté par plus de λ équations ne cessent pas d'exister, mais elles ne sont plus développables suivant les puissances de $x_1, \ldots, x_n$. Parmi celles pour lesquelles le lieu de contact est défini par λ ou moins de λ équations, il y en a aussi plusieurs qui, sans cesser d'exister, cessent d'être développables.

Mais nous pouvons compléter ces résultats et donner des expres-

cas à celui-là. En effet, si les équations du lieu de contact sont, d'une manière générale,

$$x_1 = f_1(x_{h+1}, \ldots, x_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_h = f_h(x_{k+1}), \ldots, x_h),$$

on substituera à $x_1, \ldots, x_h$ les variables suivantes

$$x_1' = x_1 - f_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$x_h' = x_h - f_h.$$

Avec les nouvelles variables, les équations du lieu de contact deviendront

$$x_1' = 0, \ldots, x_h' = 0,$$

et l'on sera ainsi ramené à la question particulière traitée dans le texte. D'ailleurs toute fonction développable suivant les puissances de

$$x_1', \ldots, x_h', x_{h+1}, \ldots, x_n$$

l'est aussi suivant celles de

$$x_1, \ldots, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_n$$

et réciproquement. Nos théorèmes s'étendent donc immédiatement au cas où le lieu de contact est représenté par les équations les plus générales.

sions remarquables pour les équations de ces différentes classes. Reprenons à cet effet l'équation

$$z = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\mu^2}{2} + \ldots$$

qui convient à l'une quelconque d'entre elles;

$$x_1 = 0, \ \ldots, \ x_\mu = 0$$

étant les équations du lieu de contact, il suit de là que, pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_\mu = 0,$$

non seulement z, mais $p_1, p_2, \ldots, p_\mu$, seront nulles, et cela, quelles que soient les variables $x_{\mu+1}, \ldots, x_n$ qui figurent dans l'expression de z à partir des termes du troisième et du quatrième degré. Or cela ne peut avoir lieu que si *tous les termes du développement contiennent, soit le carré de l'une des variables* $x_1, \ldots, x_\mu$, *soit le produit de deux de ces variables*. L'expression de z sera donc de la forme

$$(64) \qquad \begin{cases} z = A_1 x_1^2 + \ldots + A_\mu x_\mu^2 + 2 \sum \sum B_{ik} x_i x_k \\ \qquad\qquad i, k = 1, 2, \ldots, \mu \end{cases}$$

$A_1, \ldots, A_\mu, B_{ik}$ étant des fonctions quelconques dont le développement commence : 1° pour $A_1, \ldots, A_\mu$ par une constante $\frac{1}{2}$; 2° pour B_{ik} par des termes au moins du premier degré. Cette propriété des développements de A_1, B_{ik} résulte de l'expression déjà trouvée plus haut pour les termes du second degré du développement de z.

On peut obtenir une expression plus élégante par la décomposition en carrés. Écrivons

$$z = \left(x_1 \sqrt{A_1} + \frac{B_{12} x_2}{\sqrt{A_1}} + \ldots + \frac{B_{1\mu} x_\mu}{\sqrt{A_1}} \right)^2 + \Phi(x_2, \ldots, x_\mu);$$

$\sqrt{A_1}, \frac{1}{\sqrt{A_1}}$ sont développables suivant les puissances entières et po-

sitives des variables x_i, puisque le premier terme de A_1 est la constante $\frac{1}{2}$. Donc on a

$$z = x_1'^2 + \Phi(x_2, \ldots, x_\mu),$$

x_1' désignant une série de puissances entières. Quant à la fonction Φ, elle contient une variable de moins que z, mais il est facile de voir qu'elle jouit des mêmes propriétés. Par exemple, le nouveau coefficient de x_2^2 sera

$$A_2 - \frac{B_{12}^2}{A_1}.$$

Or, B_{12} s'annulant avec toutes les variables, on voit que le nouveau coefficient de x_2^2 sera encore un développement commençant par la constante $\frac{1}{2}$. En poursuivant donc le même raisonnement on mettra z sous la forme élégante

$$z = x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_\mu'^2$$

et l'on aura démontré le théorème suivant :

Quand une équation aux dérivées partielles à n variables indépendantes a une solution singulière pour laquelle on a $Z \gtrless 0$, *il y a n classes d'intégrales développables. Si*

$$z = f(x_1, \ldots, x_n)$$

est l'équation de la solution singulière, les intégrales de la première classe seront représentées par une équation de la forme

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) + u_1^2,$$

$u_1 = 0$ *étant l'équation du lieu de contact. Cette première classe contiendra les coefficients d'une fonction arbitraire de* $n - 1$ *variables.*

Les intégrales de la $k^{\text{ième}}$ *classe seront représentées par une équation de la forme*

$$z = f(x_1, \ldots, x_n) + u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_k^2$$

qui contiendra les coefficients de k fonctions arbitraires de $n-k$ variables.

Les intégrales de la $n^{ième}$ classe seront représentées par une équation de la forme

$$z = f(x_1, \cdots x_n) + u_1^2 + \cdots + u_n^2,$$

et dépendront de n constantes qui sont les coordonnées du point de contact avec l'intégrale singulière.

Si la forme

$$\sum\sum \frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k} dp_i dp_k$$

est réductible à une somme de $n-\mu$ carrés, les μ dernières classes subsistent, mais les développements précédents ne leur sont plus applicables.

On peut, ici encore, étendre le résultat de Poisson et éliminer la solution singulière. En effet, l'équation aux dérivées partielles, résolue ou non résolue par rapport à z, peut se mettre sous la forme

$$(65) \quad 2\varphi(x_1, \ldots, x_n) z + \sum\sum A_{ik} p_i p_k + 2\sum B_i p_i z + 4Cz^2 = 0,$$

A_{ik}, B_i, C étant des fonctions quelconques de toutes les variables.

Effectuons la substitution

$$2z = z'^2$$

qui donne, en désignant par p_i' la dérivée de z' par rapport à x_i,

$$p_i' z' = p_i.$$

L'équation précédente deviendra donc

$$(66) \quad z'^2 \left[\varphi(x_1, \ldots, x_n) + \sum\sum A_{ik} p_i' p_k' + \sum B_i p_i' z' + Cz'^2\right] = 0.$$

La solution singulière est ainsi mise en facteur et ne satisfait plus à la nouvelle équation qu'on obtient en supprimant z'^2, et qui, pour $z' = 0$, ne présente aucune singularité. On retrouverait ainsi tout de suite notre première classe de solutions générales. Car il est

évident que la nouvelle équation admet des solutions développables z', d'où l'on déduira

$$z = \frac{z'^2}{2}.$$

Les autres classes apparaîtraient d'une manière beaucoup moins simple.

Les résultats précédents nous paraissent établis en toute rigueur; mais comme le calcul direct des termes du second degré de z présente un intéressant problème d'analyse, j'ai cru utile de le traiter directement. Soit

$$2z = \sum\sum a_{ik} p_i p_k + \cdots = \varphi(p_1, \ldots, p_n) + \cdots$$

l'équation aux dérivées partielles. Le calcul des termes du second degré se ramène à la solution de la question suivante :

Trouver tous les polynômes homogènes du second degré satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$2z = \varphi(p_1, \ldots, p_n).$$

Pour résoudre cet intéressant problème d'analyse, nous supposerons d'abord que, par une substitution linéaire quelconque, on ait ramené φ à une somme de carrés. Alors l'équation à résoudre sera

$$2z = p_1^2 + \cdots + p_\lambda^2. \tag{67}$$

Quoique z soit inconnue, nous admettons qu'il y aura toujours [1]

[1] En effet, on peut toujours écrire la valeur inconnue de z sous la forme

$$z = \varphi(x_1, \ldots, x_\lambda) + x_1 \mathrm{P}_1 + \cdots + x_\lambda \mathrm{P}_\lambda + \psi(x_{\lambda+1}, \ldots, x_n),$$

$\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_\lambda$ étant des fonctions linéaires de $x_{\lambda+1}, \ldots, x_n$. Effectuons sur les variables $x_1, \ldots, x_\lambda$ une substitution orthogonale qui ramène φ à une somme de carrés, z prendra la forme

$$z = \mathrm{A}_1 x_1^2 + \cdots + \mathrm{A}_\mu x_\mu^2 + x_1 \mathrm{P}_1 + \cdots + x_\lambda \mathrm{P}_\lambda + \psi(x_{\lambda+1}, \ldots, x_n),$$

où μ est au plus égal à λ et l'équation aux dérivées partielles sera toujours

$$2z = p_1^2 + \cdots + p_\lambda^2. \tag{a}$$

Je dis que toutes les fonctions P_h pour lesquelles $h > \mu$ sont nulles. En effet, si l'on

une substitution orthogonale, la ramenant à une somme de carrés, et laissant invariable la somme

$$p_1^2 + \cdots + p_\lambda^2.$$

Supposons effectuée cette substitution inconnue; z prendra la forme

$$2z = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2$$

et l'on devra avoir

$$\alpha_1^2 x_1^2 + \cdots + \alpha_\lambda^2 x_\lambda^2 = \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2;$$

ce qui donne les équations

$$\alpha_1^2 = \alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_\lambda^2 = \alpha_\lambda, \ \alpha_{\lambda+1} = 0, \ \ldots, \ \alpha_n = 0.$$

substitue la valeur de z dans l'équation précédente, le second membre ne contiendra pas x_h si $h > \mu$; il faut donc que le premier membre ne le contienne pas non plus et, par conséquent, que l'on ait

$$P_h = 0, \qquad \text{si} \qquad h > \mu.$$

On peut donc donner à z la forme suivante

$$z = A_1 x_1^2 + \cdots + A_\mu x_\mu^2 + x_1 P_1 + \cdots + x_\mu P_\mu + \psi(x_{\lambda+1}, \ldots, x_n).$$

Substituons aux variables x_μ les suivantes

$$x_1 \sqrt{A_1} + \frac{P_1}{2\sqrt{A_1}} = x_1',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_\mu \sqrt{A_\mu} + \frac{P_\mu}{2\sqrt{A_\mu}} = x_\mu';$$

les dérivées $p_1, \ldots, p_\mu$ ne seront pas changées. L'équation aux dérivées partielles conservera sa forme et z deviendra

$$z = A_1 x_1'^2 + \cdots + A_\mu x_\mu'^2 + \psi_1(x_{\lambda+1}, \ldots, x_n).$$

Si l'on effectue enfin sur $x_{\lambda+1}, \ldots, x_n$ une substitution qui ramène la fonction ψ_1 à une somme de carrés, on aura obtenu la forme de z qui va nous servir de point de départ.

Nous obtenons ainsi les diverses solutions suivantes

$$z = 0,$$
$$2z = x_1^2,$$
$$2z = x_1^2 + x_2^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2z = x_1^2 + \cdots + x_\lambda^2.$$

La première correspond évidemment à la solution singulière. Mais il faut maintenant effectuer en sens inverse la substitution orthogonale qui a ramené z à une somme de carrés en laissant invariable la somme

$$p_1^2 + \cdots + p_\lambda^2.$$

Les substitutions de ce genre contiennent $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$ arbitraires. Mais pour avoir le nombre de constantes réellement distinctes contenu, par exemple, dans la solution

$$2z = x_1^2 + \cdots + x_\mu^2,$$

il faut retrancher :

1° Le nombre $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ de constantes arbitraires qui sont contenues dans la substitution orthogonale effectuée sur $x_1, \ldots, x_\mu$, substitution qui n'aurait aucun effet sur z;

2° Le nombre $\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\mu-1)}{2}$ de constantes contenues dans la substitution orthogonale effectuée sur

$$p_{\mu+1}^2 + \cdots + p_\lambda^2$$

qui laisserait cette somme invariable et ne changerait pas z. Il reste ainsi $\mu(\lambda-\mu)$ constantes arbitraires pour la classe considérée.

Dans le cas général où $\lambda = n$, cela répond bien aux résultats précédemment obtenus, μ fonctions de $n-\mu$ variables contenant bien $\mu(n-\mu)$ coefficients dans leurs termes du premier degré.

Signalons ce résultat curieux : ce n'est pas l'intégrale la plus générale qui contient le plus de coefficients arbitraires dans les termes du second degré.

§ 35. EXAMEN DES SOLUTIONS SINGULIÈRES EXCEPTIONNELLES.

Après avoir traité d'une manière détaillée le cas où $Z \gtrless 0$, disons quelques mots des solutions pour lesquelles l'équation aux dérivées partielles ne pourra être résolue par rapport à z. Nous ne nous occuperons que des intégrales pour lesquelles z est une fonction développable de $x_1, \ldots, x_n$. Soit

$$F(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n) = 0$$

l'équation aux dérivées partielles. Puisque $Z, P_1, \ldots, P_n$ sont nuls pour $z = p_1 = \ldots = p_n = 0$, cette équation ne contiendra que des termes du second degré au moins en $z, p_1, \ldots, p_n$.

Écrivons les termes de degré moindre contenant $p_1, \ldots, p_n$, ceux de degré moindre contenant à la fois $p_1, \ldots, p_n$ et z, et enfin ceux de degré moindre contenant z seulement. Nous aurons ainsi une équation de la forme

$$(68) \quad \varphi(p_1, \ldots, p_n) + \Sigma z^{\lambda_i} \psi_i(p_1, \ldots, p_n) + A z^{\lambda'} + \ldots = 0,$$

où les termes non écrits sont de degré supérieur par rapport à ceux que l'on conserve et où λ' est au moins égal à 2. D'ailleurs le degré de ψ_i ne peut être supérieur à celui de φ; car autrement le terme $z^{\lambda_i}\psi_i$ serait de degré supérieur à φ; par conséquent, la somme $\Sigma z^{\lambda_i}\psi_i$ se compose toujours d'un nombre limité de termes.

La méthode à appliquer étant toujours la même, et reposant sur l'emploi du parallélogramme de Newton, je me contenterai, pour plus de simplicité, d'examiner le cas où la somme $\Sigma z^{\lambda_i}\psi_i$ se réduit à un seul terme. Alors l'équation aux dérivées partielles peut s'écrire

$$(68\ bis) \quad \varphi(p_1, \ldots, p_n) + z^{\lambda} \psi(p_1, \ldots, p_n) + A z^{\lambda'} + \ldots = 0,$$

A étant une constante. Soient l, l' les degrés de φ et de ψ.

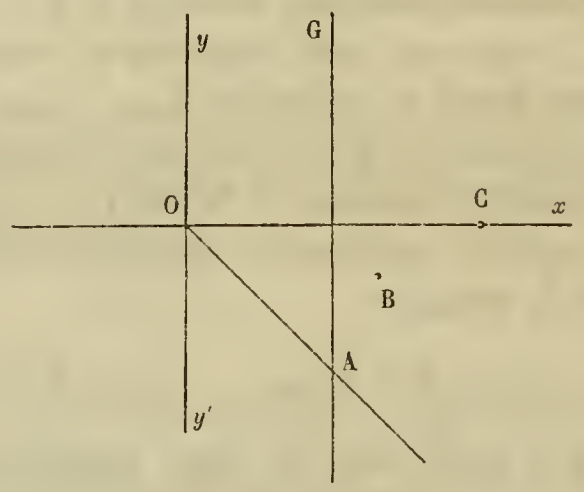
Si α est le degré de z, ceux des différents termes seront :

pour	$\varphi(p_1, \ldots, p_n)$,	$l(\alpha-1)$,
pour	$\psi(p_1, \ldots, p_n) z^{\lambda}$,	$(\lambda+l')\alpha-l'$ [1],
pour	$z^{\lambda'}$,	$\lambda'\alpha$.

Cela posé, construisons sur un plan (fig. 7) les trois points A, B, C, dont les coordonnées sont respectivement :

pour A,	$x=l$,	$y=-l$,
pour B,	$x=(\lambda+l')$,	$y=-l'$,
pour C,	$x=\lambda'$,	$y=0$.

Fig. 7.



[1] On pourrait faire à cette détermination du degré des différents termes une objection qui ne se présente pas dans le cas d'une seule variable indépendante. Quand on substitue dans chacun des deux termes $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$, $z^{\lambda}\psi(p_1 \ldots, p_n)$, l'expression de z, les degrés de ces deux termes sont, en général, $l(\alpha-1)$, $(\lambda+l')\alpha-l'$, respectivement; mais on peut objecter que, si les termes de degré moindre de z satisfont, par exemple, à l'équation

$$\psi(p_1, \ldots, p_n)=0,$$

le degré de $z^{\lambda}\psi$ pourra s'élever; ce qui mettra en défaut les raisonnements qui vont suivre, et qui s'appuient sur la détermination exacte de ce degré.

On reconnaîtra aisément que cette circonstance ne peut se présenter que si l'on cherche les intégrales tangentes à l'intégrale singulière *suivant des courbes exceptionnelles*. Nous laisserons de côté l'examen détaillé de cette question, car nous n'avons pas l'intention d'étudier les intégrales singulières exceptionnelles d'une manière aussi complète que dans le cas où l'on a Z différent de zéro.

Nous remarquons que le point A est sur la bissectrice de l'angle des axes xOy', que le point B est au-dessus de cette bissectrice et au-dessous de Ox, que le point C est sur Ox.

On verra facilement que, si par les trois points A, B, C on mène des droites de coefficient angulaire négatif égal au degré de z changé de signe, $-\alpha$, les ordonnées à l'origine de ces droites donnent les degrés des termes conservés dans l'équation, termes dont l'un au moins sera toujours de degré moindre que ceux qui ne sont pas écrits.

Cette remarque étant admise, considérons les différentes dispositions des points A, B, C. Supposons d'abord que les points B, C, comme cela a lieu dans la figure précédente, soient à la droite de AG, ce qui équivaut aux inégalités

$$\lambda + l' > l, \qquad \lambda' > l.$$

Dans ce cas, toute droite menée par A et ayant un coefficient angulaire négatif et supérieur à 1 en valeur absolue laissera B, C au-dessus d'elle, et, par conséquent, les termes de degré moindre dans l'équation seront

$$\varphi(p_1, \ldots, p_n).$$

Donc les termes de degré moindre de z devront satisfaire à l'équation

$$\varphi(p_1, \ldots, p_n) = 0. \tag{69}$$

Je dis que, dans ce cas, il ne saurait y avoir d'intégrale générale tangente à la solution singulière en tous les points d'un lieu quelconque.

Supposons, en effet, que, par un changement de variables, on ait ramené l'équation de ce lieu à la forme

$$x_1 = 0;$$

si le lieu de contact a été choisi d'une manière quelconque, la forme $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ sera complète et contiendra notamment le terme en p_1^l. Cela étant, substituons les termes de degré moindre de z.

z s'annulant avec x_1, son développement et, par conséquent, ses premiers termes contiennent x_1 en facteur. Soit

$$z = x_1^h f(x_1, \ldots, x_n)$$

le premier terme du développement. On voit bien que, si on le substitue dans l'équation

$$\varphi(p_1, \ldots, p_n) = 0,$$

le terme en p_1^l sera de degré moindre par rapport à x_1, et ne pourra se réduire avec aucun autre. Il est donc impossible de satisfaire à l'équation aux dérivées partielles.

Cette conclusion, dont nous aurons à faire usage plus loin, s'applique sans aucune modification à l'équation générale (68) toutes les fois que le degré de $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ est manifestement inférieur à celui de tous les termes conservés.

Remarquons bien que, si l'analyse précédente exclut les solutions tangentes suivant un lieu quelconque, elle n'indique rien sur le cas exceptionnel où le lieu de contact serait tel, que le terme en p_1^l disparaîtrait de la forme φ. Nous montrerons plus loin sur un exemple particulier qu'il peut exister de telles solutions, que l'analyse précédente n'exclut pas.

Quoi qu'il en soit, un point essentiel est obtenu : *nous voyons que la théorie des enveloppes ou de l'élimination des constantes ne nous aurait pas conduits à de telles solutions singulières.*

Examinons maintenant le cas (fig. 8) où, le point C restant à droite de AH, le point B est placé à gauche et, par conséquent, dans l'angle OAH. Nous venons d'examiner les solutions dans lesquelles les termes en φ seraient de degré moindre, et nous les avons écartées.

Mais ici il y en a de nouvelles, pour lesquelles les termes correspondant aux points A et B seraient de même degré.

Le degré de z sera le coefficient angulaire, changé de signe, de la droite AB. Il faut que ce degré soit entier, et l'examen de la figure montre qu'il sera alors au moins égal à 2. Soit α ce degré.

Posons $$z = \frac{z'^{\alpha}}{\alpha},$$

on aura, en désignant par p_i' la dérivée de z' par rapport à x_i,

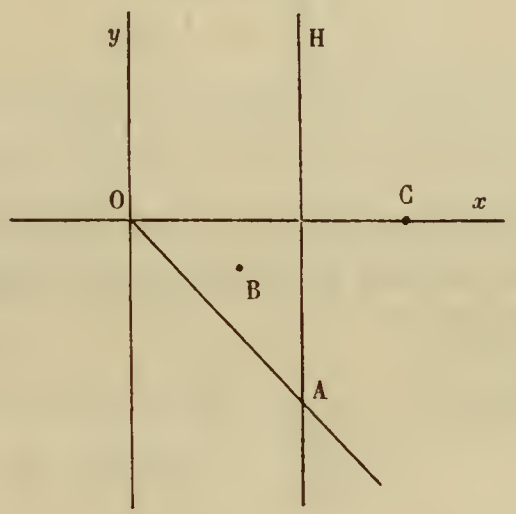
$$p_i = p_i' z'^{(\alpha-1)}.$$

L'équation aux dérivées partielles contiendra $z'^{(\alpha-1)l}$ en facteur et deviendra, après la suppression de ce facteur,

$$\varphi\left(p_1', \ldots, p_n'\right) + \frac{1}{\alpha^{\lambda}}\psi\left(p_1', \ldots, p_n'\right) + \mathrm{A}z'^{k} + \cdots = 0,$$

k désignant la différence positive $\lambda'\alpha - l(\alpha - 1)$.

Fig. 8.



On voit que la solution singulière n'est pas éliminée ; mais on est ramené à une équation qui admettra, en dehors de l'intégrale $z' = 0$, des solutions pour lesquelles $p_1', \ldots, p_n'$ ne seront plus nulles, et qui seront par conséquent développables en série. A ces solutions de l'équation transformée correspondront des solutions de la proposée de la forme

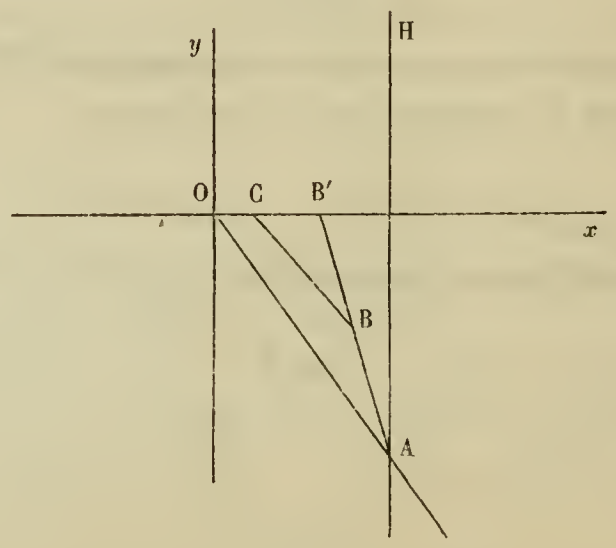
$$z = \mathrm{U}^{\alpha},$$

U désignant une série de puissances.

Remarquons que la proposition précédente s'appliquera encore si le point C, étant à gauche de AH, reste à droite de la ligne AB.

Supposons maintenant (fig. 9) que le point C soit à la gauche du point B′, où AB coupe Ox. La solution précédente ne pourra plus

Fig. 9.



convenir, mais il y en aura une, dans laquelle les termes correspondant à A et C seront du même degré. Supposons que ce degré soit entier et égal à α'.

Si nous faisons

$$z = \frac{z'^{\alpha'}}{\alpha'}, \qquad p_i = z'^{\alpha-1} p'_i,$$

l'équation aux dérivées partielles prendra la forme

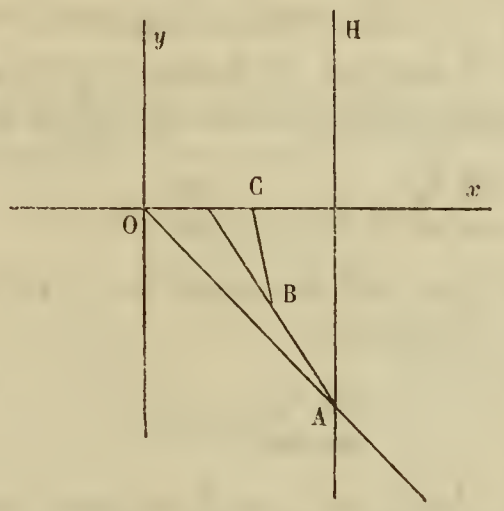
$$(70) \quad z'^{\alpha'\lambda'}\left[\varphi\left(p'_1, \ldots, p'_n\right) + z^h \psi\left(p'_1, \ldots, p'_n\right) + \frac{A}{\alpha'^{\lambda'}} + \cdots\right] = 0.$$

La solution singulière sera en facteur; mais ici la suppression de ce facteur *l'éliminera complètement*. Il restera une équation aux dérivées partielles ne présentant plus aucune singularité, et donnant des solutions développables U, auxquelles correspondront des solutions de l'équation proposée

$$z = \frac{U^{\alpha'}}{\alpha'}.$$

Un dernier cas très remarquable (fig. 10) est celui où la ligne brisée ABC tourne sa concavité du côté des y positifs.

Fig. 10.



Dans ce cas, deux groupes de solutions distinctes pourront se présenter dans la même équation. Il y aura d'abord les intégrales déjà considérées en premier lieu, et pour lesquelles les termes correspondant aux points A et B sont du même degré. Mais il pourra y en avoir d'autres encore, pour lesquelles ce seront les termes correspondant aux points B et C qui seront du même degré. C'est ce qui arrivera toutes les fois que le nombre déterminé par l'équation

$$\lambda\alpha + l'(\alpha - 1) = \lambda'\alpha$$

sera entier. Si l'on pose alors

$$z = \frac{z'^{\alpha}}{\alpha},$$

l'équation prendra la forme

$$z'^{\lambda'\alpha}\left[z'^{k}\varphi(p'_1, \ldots, p'_n) + \frac{1}{\alpha^{\lambda}}\psi(p'_1, \ldots, p'_n) + \frac{A}{\alpha^{\lambda'}} + \cdots\right] = 0.$$

Ici encore, la nouvelle équation en z', après la suppression du facteur $z'^{\lambda'\alpha}$, n'admettra plus la solution singulière, qui se trouvera ainsi éliminée. Il y aura donc des intégrales générales de deux espèces différentes, tangentes à la solution singulière. Suivant la même courbe, il y en aura une de chaque espèce.

Nous nous contenterons de ces indications très rapides, et nous appliquerons les résultats précédents à l'examen des cas les plus simples.

Dans le cas où il y a une solution singulière formée du plan des xy et pour laquelle Z est nul, la forme la plus simple de l'équation est celle dans laquelle les termes de degré moindre sont

$$(71) \qquad \sum\sum a_{ik} p_i p_k + z\sum h_i p_i + cz^2.$$

Dans ce cas, quel que soit le degré de z, les termes de degré moindre en $x_1, \ldots, x_n$ seront

$$\sum\sum a_{ik} p_i p_k,$$

et, par conséquent, il n'y aura pas d'intégrale tangente en tous les points d'une courbe *quelconque* à cette solution.

Il ne sera pas inutile de confirmer ce résultat par quelques exemples simples.

Prenons, par exemple, l'équation

$$p(q-z)=0,$$

qui admet les deux espèces d'intégrales

$$z=f(y), \qquad z=\varphi(x)e^y.$$

Les premières pourront être tangentes au plan des xy, mais ce sera alors en tous les points d'une droite parallèle à l'axe des x. Les secondes pourront aussi être tangentes au même plan, si $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$ s'annulent pour une valeur de x. Mais alors elles seront tangentes en tous les points d'une parallèle à l'axe des y. On voit, d'ailleurs, qu'il y aura une infinité d'intégrales qui ne seront pas tangentes à la solution singulière.

Traitons encore l'équation

$$pq=z^2.$$

On reconnaîtra facilement que, s'il existe des solutions dévelop-

pables tangentes à la solution singulière, à l'origine par exemple, leur développement est de la forme

$$z = \alpha x^h + \alpha_1 x^{h+1} y + \alpha_2 x^{h+2} y^2 + \cdots,$$

ou de celle qu'on obtiendrait en échangeant x en y et y en x.

Le développement précédent peut s'écrire

$$z = x^h \varphi(xy).$$

Cette remarque va nous permettre d'en déterminer les coefficients. Si nous substituons en effet cette expression dans l'équation aux dérivées partielles, nous trouvons, en posant $\alpha = xy$ et $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\alpha}$,

$$h\varphi\varphi' + \alpha\varphi'^2 = \varphi^2(\alpha),$$

ce qui donne

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 + 4\alpha}}{2\alpha}.$$

En prenant le signe + au radical, on trouve une valeur de φ restant finie pour $\alpha = 0$

$$\varphi = C \frac{e^{\sqrt{h^2 + 4xy}}}{(h + \sqrt{h^2 + 4xy})^h},$$

d'où résulte pour z l'expression

$$z = Cx^h \frac{e^{\sqrt{h^2 + 4xy}}}{(h + \sqrt{h^2 + 4xy})^h},$$

qui représente toutes les solutions tangentes à l'intégrale singulière suivant l'axe des y. On aurait des solutions analogues pour toutes les parallèles aux deux axes.

Examinons maintenant le cas où les termes du second degré en $p_1, \ldots, p_n$ manqueraient dans l'équation, et seraient remplacés par les termes du troisième. L'équation deviendra

$$(72) \qquad \sum a_{ikl} p_i p_k p_l + 2 \sum b_i p_i z + 4Az^2 + \cdots = 0.$$

Ici, conformément à la théorie générale, posons

$$2z = z'^2, \qquad p_i = z' p'_i.$$

L'équation deviendra

$$z'^3 \left(\sum a_{ikl} p'_i p'_k p'_l + \sum b_i p'_i + \mathrm{A} z' + \dots \right) = 0.$$

On voit que la solution singulière ne peut s'éliminer : elle subsiste dans la nouvelle équation, mais *comme solution ordinaire.* La nouvelle équation n'offre d'ailleurs aucune singularité. Pour $z = x_1 = \dots = x_n = 0$, elle se réduit à

$$\sum a_{ikl} p'_i p'_k p'_l + \sum b_i p'_i = 0.$$

Il y aura donc une infinité de solutions développables pour z' et, par conséquent, pour z une infinité de valeurs de la forme

$$z = \mathrm{U}^2.$$

Supposons enfin que les termes en $p_i z$, disparaissant à leur tour, soient remplacés par des termes du second degré en $p_1, \dots, p_n$. On aura l'équation

$$\sum a_{ikl} p_i p_k p_l + 3z \sum b_{ik} p_i p_k + 9\mathrm{A} z^2 + \dots = 0.$$

En posant, conformément à la méthode générale, $z = \frac{z'^3}{3}$, nous trouvons

$$(73) \qquad z'^6 \left(\sum a_{ikl} p'_i p'_k p'_l + z' \sum b_{ik} p'_i p'_k + \mathrm{A} + \dots \right) = 0.$$

La solution singulière est mise en facteur et *ne satisfait plus à l'équation transformée*, qui, pour $z' = x_1 = \dots = x_n = 0$, se réduit à

$$\sum a_{ikl} p_i p'_k p'_l + \mathrm{A} = 0$$

et n'offre aucune singularité. Il y aura donc pour z des solutions de la forme

$$z = \mathrm{U}^3.$$

Nous ne poursuivrons pas ces applications de la méthode gé-

nérale; mais nous ferons remarquer, en terminant, une conséquence des recherches précédentes.

A l'article 22, nous avons considéré certaines équations aux dérivées partielles dont les intégrales générales ont, avec l'intégrale singulière, un contact du second ordre au moins, suivant une courbe que l'on peut choisir arbitrairement; ces équations sont telles que l'on a $Z = 0$, pour tous les points de l'intégrale singulière, et par conséquent elles sont de la forme de l'équation (68) que nous venons d'étudier. D'ailleurs nous avons établi, à l'article 22, que les dérivées secondes du premier membre d'une telle équation, par rapport à $p_1, \ldots, p_n$, doivent s'annuler, quand on y substitue les valeurs de z, x_i, p_k, relatives à un élément quelconque de l'intégrale singulière : cela signifie que, pour l'équation aux dérivées partielles écrite sous la forme (68), les dérivées $\frac{\partial^2 F}{\partial p_i^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial p_i \partial p_k}$ du premier membre doivent s'annuler pour $z = p_i = 0$, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ doit être du troisième degré au moins, par rapport aux variables p_i dont elle dépend. C'est ce dernier résultat que nous pouvons maintenant confirmer et démontrer d'une nouvelle manière.

En effet, toutes les fois que la fonction $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ est du second degré seulement en $p_1, \ldots, p_n$, les termes $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ sont ceux du plus petit degré de l'équation aux dérivées partielles; et les recherches précédentes nous ont appris qu'alors l'équation ne peut pas admettre d'intégrale tangente suivant un lieu quelconque à l'intégrale singulière. Toutes les fois qu'il y aura de telles intégrales générales, ce qui a lieu pour les équations aux dérivées partielles considérées à l'article 22, il faudra donc que la fonction $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ soit au moins du troisième degré.

C'est ce qu'il est aisé de vérifier sur tous les exemples que l'on peut former directement.

Considérons, par exemple, les surfaces

$$z = \frac{(x-a)^2}{2} + \frac{(y-b)^3}{3},$$

qui sont osculatrices au plan des xy. Leur équation aux dérivées partielles est

$$\left(z-\frac{p^2}{2}\right)^2=\frac{q^3}{9}$$

ou, en développant,

$$-\frac{q^3}{9}-p^2z+z^2+\frac{p^4}{4}=0.$$

C'est bien la forme que nous devons trouver, celle de l'équation (68), où les termes indépendants de z sont du troisième degré au moins, en p, q.

D'une manière plus générale, considérons le cas de n variables et partons de l'intégrale complète

$$(74)\quad z=\frac{(x_1-a_1)^2}{2}+\ldots+\frac{(x_m-a_m)^2}{2}+\frac{(x_{m+1}-a_{m+1})^3}{3}+\ldots+\frac{(x_n-a_n)^3}{3},$$

on aura ici

$$p_i=x_i-a_i,\ \text{pour}\ i<m+1,$$
$$p_i=(x_i-a_i)^2,\ \text{pour}\ i>m,$$

et, par conséquent, l'équation aux dérivées partielles admettant l'intégrale complète (74) sera, sous forme irrationnelle,

$$z=\frac{p_1^2+\ldots+p_m^2}{2}+\frac{p_{m+1}^{\frac{3}{2}}+\ldots+p_n^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

Si l'on rend cette équation rationnelle, on verra sans peine que la fonction $\varphi(p_1,\ \ldots,\ p_n)$ est de l'ordre $3\times 2^{n-m-1}$, toujours égal ou supérieur à 3.

QUATRIÈME PARTIE.

ÉTUDE D'UNE CLASSE IMPORTANTE D'ÉQUATIONS AYANT DES SOLUTIONS SINGULIÈRES.

La théorie des solutions singulières trouve son origine dans l'étude de l'équation de Clairault

$$y - x\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Jusqu'à l'époque de Clairault, les géomètres avaient essayé de résoudre les équations différentielles en les mettant sous une forme intégrable. Il fallait au contraire différentier l'équation précédente pour en avoir la solution. Ce fait frappa vivement les géomètres : Euler, Lagrange, le citent dans leurs travaux sur les solutions singulières; Lagrange surtout l'a beaucoup étudié, et il a fait connaître toute une classe d'équations différentielles analogues à celle de Clairault, qu'elles comprennent comme cas particulier, et dont l'intégrale s'obtient également par une simple différentiation.

La théorie de Lagrange a été beaucoup étendue dans un des plus beaux mémoires de M. Serret (*Journal de Liouville*, t. XVIII, p. 1, 1re série). Mais rien encore de général n'a été fait dans cette voie, croyons-nous, pour les équations aux dérivées partielles. Cette partie de notre travail montrera que la théorie de Lagrange et de M. Serret peut s'étendre aux équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Prenons d'abord l'équation de Clairault généralisée

$$(1) \qquad z - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \ldots - p_n x_n = f(p_1, \ldots, p_n);$$

si on la différentie totalement, on trouve

$$(2) \qquad \left(x_1 + \frac{\partial f}{\partial p_1}\right) dp_1 + \ldots + \left(x_n + \frac{\partial f}{\partial p_n}\right) dp_n = 0.$$

Cette différentielle totale ne contient les dérivées du second ordre que dans les n différentielles $dp_1, \ldots, dp_n$. Cette remarque suffit à en donner la solution, sur laquelle je n'insiste pas, et qui se trouve dans le mémoire déjà cité de Lagrange. Mais elle va nous mettre sur la voie de la généralisation de cette théorie particulière.

§ 36. GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DE CLAIRAULT.

A cet effet, nous chercherons les équations aux dérivées partielles

$$Z = 0$$

qui jouissent de la propriété fondamentale de l'équation (1), c'est-à-dire qui sont telles que leur différentielle totale soit de la forme

$$dZ = P_1 dX_1 + \ldots + P_n dX_n,$$

$P_1, \ldots, P_n, X_1, \ldots, X_n$ étant des fonctions de $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$. Pour que dZ soit de cette forme, il faut que, dans l'expression

$$dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n,$$

ordonnée suivant les différentielles des variables x_i, p_k, z, les coefficients de $dp_1, \ldots, dp_n$ soient identiquement nuls, et que les coefficients de $dx_1, \ldots, dx_n$ le deviennent après qu'on a remplacé dz par

$$p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n.$$

Il faut donc, si l'on considère les différentielles de z, x_i, p_k comme indépendantes au même titre, que l'on ait identiquement

$$(3) \quad dZ - P_1 dX_1 - \ldots - P_n dX_n = \rho (dz - p_1 dx_1 - \ldots - p_n dx_n).$$

C'est l'équation que nous avons traitée au commencement de la deuxième partie, et dont nous avons donné la solution générale.

On sait que cette solution s'obtient en écrivant h relations quelconques entre $Z, X_1, \ldots, X_n, z, x_1, \ldots, x_n$

$$\psi_1 = 0, \ldots, \psi_h = 0,$$

et en écrivant que l'équation (3) est équivalente à une combinaison linéaire

$$\lambda_1 d\psi_1 + \ldots + \lambda_h d\psi_h = 0$$

des différentielles des équations précédentes.

Nous avons vu aussi que l'intégration de toute équation aux dérivées partielles permettra de trouver des fonctions Z, X_i, P_k satisfaisant à l'identité (3).

Réciproquement, supposons qu'on ait trouvé $2n+1$ fonctions Z, X_i, P_k, satisfaisant à l'identité (3). Je dis que toute équation de la forme

$$U = f(Z, X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0 \tag{4}$$

pourra être intégrée et aura, en général, une solution singulière.

En effet, on a identiquement

$$dU = \frac{\partial f}{\partial Z} dZ + \frac{\partial f}{\partial X_1} dX_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial X_n} dX_n,$$

ou, en substituant à la place de dZ sa valeur déduite de l'identité (3),

$$dU = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} + \frac{\partial f}{\partial Z} P_i \right) dX_i + \rho \frac{\partial f}{\partial Z} (dz - p_1 dx_1 - \cdots - p_n dx_n). \tag{5}$$

Maintenant, si l'on considère z comme une fonction de $x_1, \ldots, x_n$ et $p_1, \ldots, p_n$ comme ses dérivées, on a

$$dz = p_1 dx_1 + \ldots + p_n dx_n,$$

et il reste

$$dU = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial Z} P_i + \frac{\partial f}{\partial X_i} \right) dX_i. \tag{6}$$

Puisque dU est nul, il faut qu'il y ait une ou plusieurs relations entre $X_1, \ldots, X_n$. Soient

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = f_1 (X_k, \ldots, X_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{k-1} = f_{k-1} (X_k, \ldots, X_n), \end{array} \right. \tag{7}$$

toutes celles de ces relations qui sont distinctes. En substituant les

expressions de $dX_1, \ldots, dX_{k-1}$ déduites des formules précédentes, et en écrivant que la différentielle de dU est nulle, on aura

$$(8)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial f}{\partial Z}P_1+\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial X_k}+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial Z}P_{k-1}+\frac{\partial f}{\partial X_{k-1}}\right)\frac{\partial f_{k-1}}{\partial X_k}+\frac{\partial f}{\partial Z}P_k+\frac{\partial f}{\partial X_k}=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{\partial f}{\partial Z}P_1+\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)\frac{\partial f_1}{\partial X_n}+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial Z}P_{k-1}+\frac{\partial f}{\partial X_{k-1}}\right)\frac{\partial f_{k-1}}{\partial X_n}+\frac{\partial f}{\partial Z}P_n+\frac{\partial f}{\partial X_n}=0. \end{cases}$$

Ces $n-k+1$ relations, jointes à l'équation proposée (4) et aux relations (7), établiront $n+1$ relations entre les $2n+1$ indéterminées z, x_i, p_k. Du reste, en vertu de l'identité (5), ces relations établies entre Z, X_i, P_k donnent

$$dz-p_1\,dx_1-\ldots-p_n\,dx_n=0.$$

Nous aurons donc une solution de l'équation proposée.

Dans ce qui précède, nous avons négligé le cas où, dans la formule (6), on annulerait tous les coefficients de $dX_1, \ldots, dX_n$, ce qui donnerait

$$(9)\qquad \frac{\partial f}{\partial Z}P_i+\frac{\partial f}{\partial X_i}=0.$$

Ce système, qui, joint à l'équation proposée, définit généralement $z, p_1, \ldots, p_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_n$, correspond à la solution singulière. En effet, si les équations (9) sont satisfaites, U considérée comme fonction des $2n+1$ variables indépendantes z, x_i, p_k satisfera, en vertu de l'identité (5), à l'équation

$$dU=\rho\frac{\partial f}{\partial Z}(dz-p_1\,dx_1-\ldots-p_n\,dx_n),$$

ce qui est la définition même de l'intégrale singulière.

Toutefois, l'existence de la solution singulière demeure évidemment subordonnée à cette condition que les équations qui la définissent ne deviennent pas impossibles.

Remarquons aussi que, si la méthode précédente nous conduit à une première solution singulière, elle n'exclut pas la possibilité d'autres solutions de même nature.

§ 37. APPLICATIONS DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE.

Prenons d'abord

$$\begin{aligned} &Z = px + qy - z \\ &X = p \qquad\qquad P = x \\ &Y = q \qquad\qquad Q = y. \end{aligned}$$

On a identiquement

$$dZ - PdX - QdY = -(dz - p\,dx - q\,dy).$$

L'équation dont le premier membre est une fonction de X, Y, Z, prend ici la forme

$$z - px - qy = f(p, q), \tag{10}$$

et elle a généralement une solution singulière, obtenue par l'élimination de p et de q entre l'équation précédente et les suivantes

$$x + \frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad y + \frac{\partial f}{\partial q} = 0. \tag{11}$$

On sait que, le plus souvent, c'est cette solution singulière qui donne la vraie solution de la question proposée.

Soit maintenant

$$\begin{aligned} &Z = z - px \\ &X = p \qquad\qquad P = -x \\ &Y = y \qquad\qquad Q = q. \end{aligned}$$

On a

$$dZ - PdX - QdY = dz - p\,dx - q\,dy.$$

Si l'on forme l'équation

$$z - px = f(p, y), \tag{12}$$

sa différentielle totale sera

$$-x\,dp + q\,dy = \frac{\partial f}{\partial p}\,dp + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

L'intégrale singulière s'obtiendra en ajoutant à la proposée les deux suivantes

$$-x=\frac{\partial f}{\partial p},\qquad q=\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{13}$$

et en éliminant p et q entre les trois équations ainsi formées. L'élimination de q est immédiate.

Il n'est, du reste, pas difficile de faire la théorie géométrique de l'équation (12). Elle exprime que les tangentes à la surface cherchée qui sont parallèles au plan des xz sont aussi tangentes à une surface fixe (Σ). La solution générale sera donc la surface engendrée par une série de tangentes de (Σ) parallèles au plan des xz, et la solution singulière sera la surface (Σ) elle-même.

Prenons encore l'exemple suivant

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}&=z+\frac{\mathrm{R}}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \mathrm{X}&=x-\frac{\mathrm{R}p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \mathrm{P}=p,\\ \mathrm{Y}&=y-\frac{\mathrm{R}q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\qquad \mathrm{Q}=q. \end{aligned}$$

On a identiquement

$$d\mathrm{Z}-\mathrm{P}d\mathrm{X}-\mathrm{Q}d\mathrm{Y}=dz-p\,dx-q\,dy.$$

L'équation

$$f(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})=0 \tag{14}$$

a une signification géométrique très simple. En effet, X, Y, Z sont les coordonnées d'un point situé sur la normale, à une distance R du pied de la normale. L'équation (14) exprime donc que la normale à la surface cherchée vient couper la surface (Σ), représentée par l'équation

$$f(x,y,z)=0,$$

en un point situé à une distance R du pied de cette normale.

Les intégrales générales de l'équation (14) seront : 1° une sphère ayant son centre sur (Σ) et de rayon R; 2° une surface-canal ayant pour ligne des centres une courbe quelconque tracée sur (Σ).

L'intégrale singulière sera la surface parallèle menée à une distance R de (Σ).

Il est inutile d'insister; nous savons comment on résoudra d'une manière générale l'identité qui nous a servi de point de départ, et il n'y aurait aucune utilité à multiplier les exemples. Je me contenterai donc, en terminant, de traiter le cas où, pour résoudre l'identité

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \rho\,(dz - p\,dx - q\,dy),$$

on partirait des deux relations

$$(15)\qquad \begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = x^2 + y^2 + z^2, \\ Xx + Yy + Zz = 0. \end{cases}$$

On aurait alors (article 16)

$$(16)\qquad \begin{cases} X + PZ + \lambda\,(x + Pz) = 0, & -x - pz + \lambda\,(X + pZ) = 0, \\ Y + QZ + \lambda\,(y + Qz) = 0, & -y - qz + \lambda\,(Y + qZ) = 0. \end{cases}$$

Ces identités expriment, on le verra facilement, que, si le point $m\,(x, y, z)$ décrit une surface, le point M (X, Y, Z) en décrit une autre, définie par la propriété suivante. Pour avoir le point M, on élèvera, dans le plan passant par le rayon vecteur Om et la normale, une perpendiculaire OM à Om, égale à Om.

C'est la transformation dite apsidale, par laquelle on passe de l'ellipsoïde à la surface des ondes. On sait que cette transformation est réciproque. L'équation aux dérivées partielles

$$f(X, Y, Z) = 0$$

aurait donc ici la signification suivante : trouver la surface, admettant pour apsidale celle qui est représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

et la solution singulière sera encore la véritable solution du problème proposé. Les intégrales générales de l'équation aux dérivées partielles seront des surfaces lieux de cercles, que l'on définira aisément.

§ 38. SUR UNE PROPRIÉTÉ REMARQUABLE DES $n+1$ FONCTIONS $Z, X_1, \ldots, X_n$ SATISFAISANT AUX IDENTITÉS $[ZX_i]=0$, $[X_iX_k]=0$.

Au lieu de multiplier les applications, je préfère insister sur une propriété remarquable des fonctions $Z, X_1, \ldots, X_n$ satisfaisant à l'identité

$$(17)\quad dZ - P_1\,dX_1 - \ldots - P_n\,dX_n = \rho\,(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n).$$

Si l'on considère d'abord le cas particulier des trois fonctions

$$z - px - qy, \qquad p, \qquad q,$$

on voit que les équations

$$z - px - qy = f(p),$$
$$z - px - qy = f_1(q),$$
$$p = f_2(q),$$

prises chacune séparément, sont des intégrales premières de la même équation du second ordre

$$rt - s^2 = 0.$$

Je me suis proposé de rechercher si cette propriété s'étend aux fonctions générales que nous avons obtenues.

Considérons, à cet effet, des fonctions $Z, X_1, \ldots, X_n$ satisfaisant à l'identité (17). L'équation

$$(18)\qquad \varphi(X_1, \ldots, X_n) = 0$$

sera une intégrale première de l'équation du second ordre

$$(19)\qquad \frac{d(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0.$$

Or, comme on a

$$dZ = P_1\,dX_1 + \ldots + P_n\,dX_n,$$

il est évident que le déterminant fonctionnel de Z et de $n-1$

quelconques des fonctions X_i, de $X_2, \ldots, X_n$ par exemple, aura pour valeur

$$\frac{d(Z, X_2, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)} = P_1 \frac{d(X_1, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Ainsi l'équation (19) s'intégrera en établissant deux relations, au moins, entre $Z, X_1, \ldots, X_n$. Du reste, comme les équations aux dérivées partielles du premier ordre ainsi obtenues sont celles que nous avons intégrées complètement à l'article 36, on voit qu'on aura, non seulement les intégrales premières, mais aussi les intégrales finies de l'équation (19).

Réciproquement, supposons qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre puisse admettre deux intégrales premières de la forme

$$(20) \qquad \begin{cases} \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0, \\ \varphi_1(Z, X_2, \ldots, X_n) = 0. \end{cases}$$

Pour que ces deux équations aux dérivées partielles soient compatibles, quelles que soient les fonctions φ, φ_1 [1], il faut que l'on ait, comme on sait,

$$(Z X_i) = 0, \qquad (X_i X_k) = 0,$$

et, par conséquent, les fonctions Z, X_i sont celles qui nous ont servi de point de départ.

[1] Il est facile de reconnaître *a priori* que le crochet $(\varphi\varphi_1)$ doit être identiquement nul. En effet, les deux équations

$$\varphi(Z, X_2, \ldots, X_n) = 0,$$
$$\varphi_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0,$$

étant par hypothèse des intégrales premières de la même équation du second ordre, celle-ci peut se mettre sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes

$$\frac{d(Z, X_2, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)} = 0, \qquad \frac{d(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)} = 0.$$

Il suit de là que, toutes les fois que l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$(\alpha) \qquad \varphi(Z, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

sera satisfaite, et par conséquent aussi l'équation du second ordre, il y aura, en

Ainsi, *nous obtenons le moyen de former et d'intégrer toutes les équations aux dérivées partielles du second ordre qui peuvent admettre deux intégrales premières de la forme* (20) [1].

vertu de la seconde forme de cette équation du second ordre, et par conséquent comme conséquence de l'équation (α), une certaine relation

$$(\beta) \qquad \varphi_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

entre $X_1, \ldots, X_n$. Cette relation doit d'ailleurs être la plus générale possible, et la fonction φ_1 doit être quelconque; car, s'il en était autrement, l'intégration générale de l'équation (α) serait ramenée à celle d'un système de deux équations (α), (β) ne contenant pas une fonction arbitraire de $n-1$ variables; et l'on sait que l'intégration de ces deux équations simultanées ne pourrait donner l'intégrale générale de l'équation (α). Il faut donc que les deux équations (α), (β) soient compatibles, quelle que soit la fonction φ_1, et par conséquent que le crochet $(\varphi\varphi_1)$ soit nul; ce qui entraîne les relations

$$(Z X_i) = 0, \qquad (X_i X_k) = 0,$$

écrites dans le texte.

[1] On peut obtenir le même résultat par une méthode toute différente.

Puisque l'équation du second ordre admet par hypothèse les deux intégrales premières (20), elle peut prendre les deux formes équivalentes

$$(\alpha) \qquad \frac{d(Z, X_2, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)} = 0,$$

$$(\beta) \qquad \frac{d(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)} = 0.$$

Ces deux équations (α), (β), étant du même ordre et de même forme par rapport aux dérivées secondes de z, ne peuvent différer que par un facteur fonction des seules variables z, x_i, p_k. On a donc l'identité

$$(\gamma) \qquad \frac{d(Z, X_2, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)} = P_1 \frac{d(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)},$$

où P_1 ne dépend que de z, x_i, p_k, et ne contient aucune des dérivées secondes de z.

Cela posé, je dis que l'équation du second ordre admet, en dehors des deux intégrales premières (20), $n-1$ autres intégrales premières, dont le type est le suivant

$$Z = \psi(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1} \ldots, X_n).$$

Si l'on substitue en effet cette expression de Z dans l'équation (α), on trouve

$$\frac{\partial \psi}{\partial X_1} \frac{d(X_1, X_2, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)},$$

résultat identiquement nul en vertu de la seconde forme (β) de la même équation;

Par exemple, dans le cas de deux variables indépendantes, nous obtiendrons les équations aux dérivées partielles admettant deux intégrales premières de la forme

$$Z=\varphi(X), \qquad Y=\psi(X),$$

c'est-à-dire celles pour lesquelles les équations de la caractéristique sont exactement intégrables. Voici le théorème qui résulte, en ce qui concerne le cas de deux variables indépendantes, des recherches précédentes.

Pour trouver toutes les équations du second ordre admettant deux intégrales intermédiaires de la forme

$$X=\varphi(Z), \qquad Y=\psi(Z),$$

on prendra d'une manière quelconque cinq fonctions X, Y, Z, P, Q *donnant naissance à l'identité différentielle*

$$dZ-PdX-QdY=\rho\,(dz-pdx-qdy).$$

en répétant donc le raisonnement qui nous a conduit à l'identité (γ), nous établirons de même l'identité

$$(\delta) \qquad \frac{d(Z, X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)}=P_i\frac{d(X_1, \ldots, X_n)}{d(x_1, \ldots, x_n)},$$

analogue à l'identité (γ) et où P_i ne dépend, comme P_1, que de z, x_i, p_k, et ne contient pas les dérivées secondes de z. On reconnaîtra aisément que les identités (γ), (δ) peuvent être remplacées par la suivante

$$(\varepsilon) \qquad dZ=P_1\,dX_1+\cdots+P_n\,dX_n.$$

Il suffit en effet d'écrire, en égalant à zéro les coefficients de $dx_1, \ldots, dx_n$, les n équations comprises dans la précédente, et de les résoudre par rapport à $P_1, \ldots, P_n$ pour retrouver les formules (γ), (δ).

D'ailleurs, comme $P_1, P_2, \ldots, P_n$ ne dépendent que de z, x_i, p_k, il faut qu'en ordonnant l'identité (ε) par rapport aux différentielles de z, x_i, p_k, les coefficients des différentielles dp_k soient nuls, et que ceux des différentielles dx_i le deviennent quand on aura remplacé dz par

$$p_1\,dx_1+\cdots+p_n\,dx_n.$$

C'est là précisément le résultat établi dans le texte.

Cela posé, l'équation aux dérivées partielles du second ordre prendra l'une des trois formes équivalentes

$$\frac{d(X, Y)}{d(x, y)} = 0, \qquad \frac{d(X, Z)}{d(x, y)} = 0, \qquad \frac{d(Y, Z)}{d(x, y)} = 0,$$

et son intégrale finie s'obtiendra en éliminant p et q entre les trois équations

$$X = \varphi(Z), \qquad Y = \psi(Z),$$
$$1 = P\varphi'(Z) + Q\psi'(Z).$$

C'est ainsi que les trois fonctions

$$Z = z + \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$
$$X = x - \frac{Rp}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$
$$Y = y - \frac{Rq}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

donnent naissance à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$R^2 (rt - s^2) + R\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + q^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2)\, t] + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

qui a été intégrée par Monge et caractérise toute surface-canal.

Une propriété importante de cette classe d'équations consiste en ce que les deux systèmes de caractéristiques sont confondus et se ramènent à un seul.

§ 39. APPLICATION DE LA THÉORIE PRÉCÉDENTE À LA DÉTERMINATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE QUI ONT DEUX INTÉGRALES INTERMÉDIAIRES.

La théorie précédente va nous permettre de former et d'intégrer toutes les équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes qui ont des intégrales premières, correspondant chacune à une caractéristique différente.

Soient, en effet,

$$(21)\qquad \begin{cases} X=\varphi(U), \\ Y=\psi(V), \end{cases}$$

ces deux intégrales premières. Les deux équations précédentes devant être compatibles, quelles que soient φ, ψ, on aura

$$(22)\quad [XY]=0, \qquad [XV]=0, \qquad [UY]=0, \qquad [UV]=0.$$

Réciproquement, si quatre fonctions satisfont à ces équations, les deux équations (21) seront toujours compatibles et, par conséquent, donneront naissance, par l'élimination des fonctions φ, ψ respectivement, à la même équation du second ordre.

Les deux fonctions X, Y étant liées par la première des équations (22), il existera toujours une fonction Z satisfaisant aux deux équations

$$(ZX)=0, \qquad (ZY)=0,$$

et distincte de X et de Y. Nous ferons même remarquer que, lorsqu'on aura trouvé une fonction Z satisfaisant à ces équations, la fonction plus générale $\varphi(X, Y, Z)$ jouira de la même propriété.

Cela posé, d'après un lemme énoncé à la page 85, il sera possible de trouver deux fonctions P, Q telles que l'on ait

$$dZ - P\,dX - Q\,dY = \rho\,(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Effectuons maintenant la transformation de contact qui substitue les variables X, Y, Z, P, Q aux variables primitives x, y, z, p, q. Nos deux intégrales intermédiaires prendront la forme

$$U=\varphi(x), \qquad V=\psi(y),$$

et les équations (22) deviendront

$$(23)\qquad \frac{\partial V}{\partial p}=0, \qquad \frac{\partial U}{\partial q}=0, \qquad (UV)=0.$$

Nous voyons que les fonctions U, V sont indépendantes respective-

ment de q et de p. Quant à la dernière équation, on peut l'écrire sous la forme

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial y}+q\frac{\partial U}{\partial z}}{\frac{\partial U}{\partial p}}=\frac{\frac{\partial V}{\partial x}+p\frac{\partial V}{\partial z}}{\frac{\partial V}{\partial q}}.$$

U ne dépendant pas de q, on voit que la valeur commune des deux membres doit être une fonction linéaire de q. Pour la même raison, V ne contenant pas p, cette valeur commune doit être une fonction linéaire de p. Elle est donc de la forme

$$Mpq+Nq+N'p+P,$$

où M, N, N', P ne dépendent que de x, y, z; et l'on a

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial p}(N'p+P), \qquad \frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial q}(Nq+P),$$
$$\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial p}(Mp+N), \qquad \frac{\partial V}{\partial z}=\frac{\partial V}{\partial q}(M'q+N').$$

On déduit facilement de ces équations que U, V sont respectivement de la forme

$$U=\mathcal{F}(Ap+B, x),$$

$$V=\mathcal{F}_1(Cq+D, y),$$

où A, B, C, D ne dépendent que de x, y, z. Par conséquent, nos deux intégrales intermédiaires peuvent s'écrire

$$(24)\qquad \begin{cases} Ap+B=U=\varphi(x), \\ Cq+D=V=\psi(y), \end{cases}$$

φ et ψ ne désignant pas d'ailleurs les mêmes fonctions que précédemment. Il est aisé de voir que, si l'une des fonctions A ou C était nulle, on serait ramené au cas où les deux caractéristiques sont confondues. Nous supposerons donc dans la suite A et C différents de zéro.

Déterminons une fonction F de x, y, z par l'équation

$$A = \frac{\partial F}{\partial z};$$

on aura

$$U = p\frac{\partial F}{\partial z} + B,$$

et si l'on effectue le changement de variables, évidemment permis, qui consiste à substituer F à z, U prendra la forme $p + B'$. Nous pouvons donc remplacer les formules (24) par les suivantes :

$$(25) \qquad \begin{cases} U = p + B = \varphi,(x) \\ V = Cq + D = \psi(y). \end{cases}$$

Écrivons maintenant la condition $(UV) = 0$, nous aurons l'équation

$$q\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial x} + p\left(q\frac{\partial C}{\partial z} + \frac{\partial D}{\partial z}\right) - C\left(\frac{\partial B}{\partial y} + q\frac{\partial B}{\partial z}\right) = 0,$$

qui se décompose dans les suivantes :

$$(26) \qquad \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial C}{\partial x} - C\frac{\partial B}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial D}{\partial x} - C\frac{\partial B}{\partial y} = 0.$$

Différentions par rapport à z la seconde et la quatrième de ces équations, en tenant compte des deux autres. Nous aurons

$$\frac{\partial^2 B}{\partial z^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial y\,\partial z} = 0,$$

et, par conséquent, $\frac{\partial B}{\partial z}$ sera une fonction de x. Nous pourrons donc poser

$$B = z\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} + H(x, y),$$

et notre première intégrale (25) deviendra

$$\frac{\partial}{\partial x}[z\theta(x)] + \theta H = \theta\varphi.$$

Si l'on effectue un nouveau changement de variables et que l'on substitue $z\theta(x)$ à z, cette intégrale conservera la même forme;

mais B *sera devenu indépendant de z.* Introduisons cette hypothèse dans les formules (26); elles deviendront

$$(26\,bis)\qquad \frac{\partial C}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial C}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial D}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial D}{\partial x}-C\frac{\partial B}{\partial y}=0.$$

Les deux premières équations nous donnent

$$C=f(y).$$

Mais alors on peut diviser la seconde des intégrales (25) par C et ramener C à l'unité. Faisant C = 1 dans les formules (26 *bis*), il reste

$$\frac{\partial D}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial D}{\partial x}=\frac{\partial B}{\partial y}.$$

La solution générale de ces équations est donnée par les formules

$$B=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y),\qquad D=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y),$$

et les intégrales (25) prennent la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}[z+f(x,y)]=\varphi(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[z+f(x,y)]=\psi(y).$$

Si nous effectuons un dernier changement de variables en substituant $z+f(x,y)$ à z, nous obtenons pour nos intégrales intermédiaires l'expression définitive

$$p=\varphi'(x),\qquad q=\psi'(y),$$

qui nous donne

$$z=\varphi(x)+\psi(y).$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Pour obtenir toutes les équations aux dérivées partielles ayant deux intégrales intermédiaires, correspondant chacune à une caractéristique différente, on formera d'une manière quelconque cinq fonctions satisfaisant à l'identité

$$dZ-PdX-QdY=\rho(dz-p\,dx-q\,dy).$$

Les deux intégrales intermédiaires de l'équation cherchée seront

$$P = \varphi'(X), \qquad Q = \psi'(Y);$$

son intégrale finie s'obtiendra en éliminant p, q entre ces équations et la suivante

$$Z = \varphi(X) + \psi(Y),$$

et l'équation elle-même prendra l'une des deux formes équivalentes

$$\frac{d(P,X)}{d(x,y)} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d(Q,Y)}{d(x,y)} = 0.$$

§ 40. GÉNÉRALISATION DES THÉORIES PRÉCÉDENTES ET LEUR EXTENSION AUX DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

La théorie précédente, qui indique le moyen de former une infinité d'équations semblables à celle de Clairault, ne s'applique qu'au premier ordre. Nous allons maintenant indiquer comment on pourrait l'étendre aux équations aux dérivées partielles d'ordres supérieurs. Cette généralisation repose sur des idées nouvelles concernant la théorie du contact, dans le cas de plus d'une variable indépendante.

Dans le cas d'une seule variable, la théorie du contact ne présente aucune difficulté. Si une courbe contient n paramètres, on peut toujours disposer de ces paramètres de manière à réaliser un contact du $n-1^{ième}$ ordre avec une surface donnée. Mais la question se présente sous un tout autre aspect dans le cas de plus d'une variable indépendante, pour les surfaces, par exemple.

Nous dirons que deux surfaces ont un contact du $n^{ième}$ ordre en un point, lorsqu'en ce point commun les dérivées des n premiers ordres de z considérée comme fonction de x et de y seront les mêmes. Or ces dérivées, en y comprenant z, sont au nombre de $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Ainsi, pour qu'on puisse assurer le contact du $n^{ième}$ ordre d'une surface d'espèce déterminée (Σ) avec une autre surface quelconque en un point arbitrairement choisi, il faudra que l'équation de (Σ) contienne au moins $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ paramètres arbitraires. C'est ainsi

que, l'équation du plan contenant trois paramètres, on peut trouver un plan ayant un contact du premier ordre avec une surface donnée, en un point quelconque.

Pour bien faire saisir la liaison de la théorie précédente avec celle que nous allons développer, nous allons montrer que ces équations de Clairault généralisées que nous avons obtenues dérivent, de la manière la plus simple, de la théorie du contact du premier ordre. Pour plus de netteté, nous raisonnerons dans l'hypothèse de deux variables indépendantes seulement.

Considérons une surface (Σ) à trois paramètres, que nous désignerons par X, Y, Z; x, y, z seront les coordonnées variables. Soit

$$f(X, Y, Z, x, y, z) = 0$$

l'équation de cette surface. Si l'on veut qu'elle soit tangente en un point (x, y, z) à une surface quelconque pour laquelle p et q sont les dérivées de z, on devra avoir les trois équations :

$$(27) \qquad \begin{cases} f(X, Y, Z, x, y, z) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

qui permettront d'exprimer les paramètres X, Y, Z comme fonctions de x, y, z, p, q.

Par exemple, pour le cas du plan

$$z = Xx + Yy + Z,$$

on a

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = z - px - qy,$$

et l'on voit que l'équation de Clairault s'obtient en établissant une relation entre ces valeurs de X, Y, Z

$$Z = \varphi(X, Y)$$

ou

$$z - px - qy = \varphi(p, q).$$

Dans le cas où la surface (Σ) est quelconque, X, Y, Z sont des

fonctions plus compliquées que les précédentes; mais pour obtenir l'analogue de l'équation si simple que l'on vient de considérer, il suffira évidemment de considérer l'équation

$$f(X, Y, Z) = 0, \tag{28}$$

où X, Y, Z sont données par les formules (27). Or cette équation est précisément celle que nous avons traitée dans les articles précédents.

En effet, différentions la première des équations (27), et regardons x, y, z, p, q comme des variables indépendantes. En tenant compte des autres équations (27), nous aurons

$$\frac{\partial f}{\partial Z} dZ + \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{\partial f}{\partial Y} dY = -\frac{\partial f}{\partial z} (dz - p dx - q dy),$$

et en posant

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \rho \frac{\partial F}{\partial Z} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial Z} P + \frac{\partial f}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial Z} Q + \frac{\partial f}{\partial Y} = 0,$$

l'équation précédente deviendra

$$dZ - P dX - Q dY = \rho (dz - p dx - q dy). \tag{29}$$

Ainsi les fonctions X, Y, Z de notre équation (28) sont bien celles que nous avons considérées, en prenant pour point de départ l'identité (29), et l'on voit que *les équations nouvelles que nous ajoutons à celles de Clairault sont précisément celles que l'on obtiendrait en substituant, dans la théorie du contact du premier ordre, à un plan une surface quelconque à trois paramètres.*

Nous sommes ainsi conduit, pour étendre la théorie exposée dans les articles précédents aux dérivées de tous les ordres, à étudier les questions relatives au contact d'ordre supérieur au premier.

Or, pour assurer le contact du second ordre, il faudrait considérer des surfaces ayant au moins six paramètres variables. On voit donc que, si l'on n'introduit aucune notion nouvelle, on ne saurait faire jouer un rôle spécial aux surfaces ayant plus de trois et moins de six paramètres.

Une théorie importante, celle des lignes de courbure, montre cependant que, par exemple pour les surfaces à quatre paramètres variables, telles que les sphères, on peut compléter la théorie du contact. Parmi les sphères tangentes en un point à une surface, il y en a deux jouant un rôle remarquable; ce sont celles qui ont leur centre aux centres de courbure, et qui se distinguent de toutes les autres en ce qu'elles coupent la surface suivant une courbe ayant un rebroussement au point de contact. Cette remarque nous met sur la voie de la généralisation suivante :

Étant donnée une surface (S) à quatre paramètres, on pourra toujours disposer de ces quatre paramètres de telle manière qu'elle soit tangente en un point quelconque à une surface prise arbitrairement et, en outre, que la courbe d'intersection des deux surfaces ait un rebroussement au point de contact.

Voyons comment s'exprimera cette condition. Prenons pour origine le point de contact, pour plan tangent le plan des xy; les équations des deux surfaces, résolues par rapport à z, seront

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots,$$
$$z' = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + \dots$$

Les tangentes à l'origine, à leur courbe d'intersection, seront données par l'équation

$$(a - a')x^2 + 2(b - b')xy + (c - c')y^2 = 0.$$

Pour qu'elles soient confondues, il faut que l'on ait

$$(b - b')^2 - (a - a')(c - c') = 0,$$

ou, mieux, qu'il existe une valeur du rapport $\frac{y}{x}$ satisfaisant aux équations suivantes :

$$(a - a')x + (b - b')y = 0,$$
$$(b - b')x + (c - c')y = 0;$$

ce qui exprime qu'il existe une direction pour laquelle les accrois-

sements dp, dq des dérivées partielles p, q sont les mêmes pour les deux surfaces.

Étant données deux surfaces tangentes en un point, dp, dq ne sont pas, en général, les mêmes pour les deux surfaces, dans quelque direction que l'on se déplace à partir du point de contact; ici, pour assurer le contact le plus intime, nous exprimerons qu'il y a une direction pour laquelle ces différentielles sont les mêmes; et nous voyons que cela ne peut avoir lieu que si la courbe d'intersection des deux surfaces a un rebroussement, et pour la direction de la tangente au point de rebroussement.

Soit donc

$$f(x, y, z, a, b, c, h) = 0$$

l'équation d'une surface à quatre paramètres. Nous déterminerons ces paramètres de manière à satisfaire aux équations suivantes :

$$(30) \qquad \begin{cases} f(x, y, z, a, b, c, h) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z} = 0, \\ d\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + p\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = 0, \qquad d\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} + q\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = 0, \end{cases}$$

les deux dernières équations contenant le rapport $\frac{dy}{dx}$, qui sera considéré comme une inconnue. Étant donnée une surface quelconque, les équations (30), au nombre de cinq, détermineront, pour chaque point de la surface, a, b, c, h, $\frac{dy}{dx}$ en fonction de x, y, z, p, q, r, s, t.

La valeur de $\frac{dy}{dx}$ définit, pour chaque point de cette surface, la direction de la tangente à un système de courbes qui jouent le rôle des lignes de courbure, et que l'on pourrait appeler *lignes d'osculation* [1].

[1] Cette généralisation de la théorie des lignes de courbure a déjà été signalée par M. Lie dans son Mémoire *Ueber Differentialgleichungen und Complexe* (*Mathematische Annalen*, t. V, p. 195); mais les remarques faites sur ce sujet par cet excellent géomètre n'ont que des rapports éloignés avec celles que je présente dans ce travail.

Ce fait, que la théorie précédente comprend comme cas particulier celle des lignes de courbure, ne paraît pas laisser de doute sur l'utilité des remarques que nous venons de faire. Mais nous allons montrer aussi qu'en suivant la voie que nous avons indiquée, on est conduit, comme pour le contact du premier ordre, à des équations aux dérivées partielles que l'on saura intégrer.

a, b, c, h étant des fonctions de x, y, de z et de ses dérivées des deux premiers ordres, déterminées par les équations (30), considérons l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\text{(31)} \qquad F(a, b, c, h) = 0.$$

Je dis qu'on pourra toujours l'intégrer.

Différentions, en effet, l'équation précédente, en supposant que l'on se déplace dans la direction de la ligne d'osculation, c'est-à-dire en attribuant à dx et dy les valeurs qui satisfont aux deux dernières équations (30), on aura

$$\text{(31 bis)} \qquad \frac{\partial F}{\partial a}da + \frac{\partial F}{\partial b}db + \frac{\partial F}{\partial c}dc + \frac{\partial F}{\partial h}dh = 0.$$

Mais si, dans la même hypothèse, on différentie les trois premières équations (30), en posant, pour abréger,

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z},$$

on trouvera, en tenant compte des formules (30),

$$\text{(32)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a}da + \dfrac{\partial f}{\partial b}db + \dfrac{\partial f}{\partial c}dc + \dfrac{\partial f}{\partial h}dh = 0, \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial a}da + \dfrac{\partial f_1}{\partial b}db + \dfrac{\partial f_1}{\partial c}dc + \dfrac{\partial f_1}{\partial h}dh = 0, \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial a}da + \dfrac{\partial f_2}{\partial b}db + \dfrac{\partial f_2}{\partial c}dc + \dfrac{\partial f_2}{\partial h}dh = 0. \end{cases}$$

Ces trois relations établissent une propriété fondamentale des fonctions a, b, c, h. Car elles nous montrent que les rapports de da, db, dc, dh ne dépendent que de $a, b, c, h, x, y, z, p, q$, et nullement des

dérivées du troisième ordre. On en déduit pour les rapports de da, db, dc, dh des expressions de la forme

$$\frac{da}{\Omega} = \frac{db}{\Omega_1} = \frac{dc}{\Omega_2} = \frac{dh}{\Omega_3},$$

et, par suite, les différentielles da, db, dc, dh peuvent s'écrire

$$(33) \qquad da = \Omega\Pi, \qquad db = \Omega_1\Pi, \qquad dc = \Omega_2\Pi, \qquad dh = \Omega_3\Pi,$$

Π étant de la forme

$$\Pi = M dx + N dy,$$

où dx, dy sont les différentielles correspondantes à la ligne d'osculation, et où M et N sont *les seules* fonctions contenant les dérivées du troisième ordre de z.

Si l'on substitue les valeurs des différentielles, déduites des formules (33), dans l'équation (31 *bis*), on trouvera

$$(34) \qquad \Pi\left(\frac{\partial F}{\partial a}\Omega + \frac{\partial F}{\partial b}\Omega_1 + \frac{\partial F}{\partial c}\Omega_2 + \frac{\partial F}{\partial h}\Omega_3\right) = 0,$$

et cette équation peut être vérifiée de deux manières différentes.

On peut d'abord égaler Π à zéro. Alors on voit que da, db, dc, dh seront nuls, et, par conséquent, a, b, c, h constants, quand on se déplacera sur la ligne d'osculation. Puisque ces fonctions demeurent constantes en même temps, elles sont, sur toute l'étendue de la surface, fonctions les unes des autres. On devra donc poser

$$(35) \qquad b = f(a), \qquad c = f_1(a), \qquad h = f_2(a),$$

la dernière fonction étant définie par l'équation (31) et les deux premières étant arbitraires; et il n'y aura plus qu'à chercher l'enveloppe de la surface représentée par l'équation

$$f(x, y, z, a, b, c, h) = 0,$$

pour obtenir la solution générale, avec deux fonctions arbitraires, de l'équation aux dérivées partielles proposée.

Mais on peut satisfaire autrement à l'équation (34). Égalons à zéro le second facteur : nous obtiendrons l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a}\Omega+\frac{\partial F}{\partial b}\Omega_1+\frac{\partial F}{\partial c}\Omega_2+\frac{\partial F}{\partial h}\Omega_3=0,$$

qui, jointe à l'équation proposée et aux trois premières équations (30), permet d'éliminer a, b, c, h, et conduit à une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\Phi(x, y, z, p, q)=0, \tag{36}$$

qui donnera, en général, les véritables solutions de la question proposée.

Réciproquement, on peut se demander si toute intégrale de l'équation (36) satisfait à l'équation du second ordre. La discussion de cette question ne présente aucune difficulté, mais elle conduit à une conséquence intéressante, que nous nous contenterons d'énoncer, et que nous allons vérifier sur un exemple particulier. L'équation (36), qui peut être considérée comme une solution singulière de l'équation du second ordre, a elle-même une solution singulière, qui est la *seule* des solutions de l'équation (36) ne vérifiant pas l'équation du second ordre proposée.

Appliquons la méthode générale que nous venons d'indiquer à la résolution de la question suivante : *Déterminer une surface, sachant qu'il y a une certaine relation entre le rayon de courbure et les coordonnées du centre de courbure correspondant, ou, ce qui revient au même, entre les quatre paramètres d'une des deux sphères osculatrices en chaque point.*

Nous ferons remarquer que, si cette relation ne contenait pas le rayon de courbure, la question proposée équivaudrait à la suivante : *Déterminer une surface ayant ses centres de courbure sur une surface* (Σ); problème qui revient à celui-ci : *Trouver les lignes géodésiques de* (Σ).

Désignons par R, α, β, γ le rayon de courbure et les coordonnées du centre correspondant. L'équation donnée est

$$f(\alpha, \beta, \gamma, R)=0, \tag{37}$$

et si l'on y remplace $\alpha, \beta, \gamma, \mathrm{R}$ par leurs expressions en fonction de z et de ses dérivées, on voit que l'on aura à intégrer une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Désignons par X, Y, Z les cosinus des angles que fait la normale avec les axes. On aura

$$(38) \qquad \alpha = x - \mathrm{XR}, \qquad \beta = y - \mathrm{YR}, \qquad \gamma = z - \mathrm{ZR}.$$

On sait que, si l'on se déplace sur la ligne de courbure, on aura les formules

$$dx = \mathrm{R}d\mathrm{X}, \qquad dy = \mathrm{R}d\mathrm{Y}, \qquad dz = \mathrm{R}d\mathrm{Z},$$

dues à Olinde Rodrigues.

D'après cela, si nous différentions les formules (38), en supposant toujours que l'on se déplace suivant la ligne de courbure, nous aurons

$$(39) \qquad d\alpha = -\mathrm{X}d\mathrm{R}, \qquad d\beta = -\mathrm{Y}d\mathrm{R}, \qquad d\gamma = -\mathrm{Z}d\mathrm{R}.$$

Ce sont les formules qui, dans la question actuelle, correspondent aux équations (33). Les dérivées du troisième ordre ne figurent, on le voit, que dans $d\mathrm{R}$.

Différentions l'équation proposée (37), toujours suivant la direction de la ligne de courbure, et substituons les expressions de $d\alpha$, $d\beta, d\gamma$, déduites des équations (39). Nous aurons

$$\left(\mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial \beta} + \mathrm{Z}\frac{\partial f}{\partial \gamma} - \frac{\partial f}{\partial \mathrm{R}}\right) d\mathrm{R} = 0.$$

Le facteur $d\mathrm{R}$, égalé à zéro, exprime que R et, par conséquent, α, β, γ sont constants en tous les points d'une ligne de courbure. A cette hypothèse correspond, comme solution, une surface enveloppe de sphères, dépendant de deux fonctions arbitraires, que l'on introduit en prenant pour lieu des centres une courbe quelconque, et en déterminant R par l'équation (37). Cette solution de l'équation aux dérivées partielles est évidente géométriquement.

Mais si l'on égale à zéro le second facteur, on aura une nouvelle solution. L'équation ainsi obtenue est

$$\mathrm{X}\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \mathrm{Y}\frac{\partial f}{\partial \beta} + \mathrm{Z}\frac{\partial f}{\partial \gamma} - \frac{\partial f}{\partial \mathrm{R}} = 0.$$

Joignons cette équation aux formules (37), (38), nous aurons le système

$$(40)\qquad \begin{cases} \alpha = x - \mathrm{XR}, \qquad \beta = y - \mathrm{YR}, \qquad \gamma = z - \mathrm{ZR}, \\ f(\alpha, \beta, \gamma, \mathrm{R}) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{R}} - \mathrm{X}\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} - \mathrm{Y}\dfrac{\partial f}{\partial \beta} - \mathrm{Z}\dfrac{\partial f}{\partial \gamma} = 0, \end{cases}$$

de cinq équations entre lesquelles on éliminera α, β, γ, R; et l'on formera ainsi une équation aux dérivées partielles du premier ordre[1] qui doit donner les solutions véritables du problème proposé.

Réciproquement, cherchons si toute solution de cette équation est aussi une intégrale de l'équation du second ordre.

Pour résoudre cette question, il n'est pas nécessaire d'éliminer α, β, γ, R entre les équations (40). Il suffit de regarder ces quatre paramètres comme des fonctions auxiliaires déterminées de manière à satisfaire à ces équations. La forme des premières montre déjà que α, β, γ sont les coordonnées d'un point situé sur la normale; il faudra prouver que ce point est le centre de courbure.

En différentiant la quatrième des équations (40) et tenant compte de la dernière, on a

$$(41)\qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha}(dx - \mathrm{R}d\mathrm{X}) + \frac{\partial f}{\partial \beta}(dy - \mathrm{R}dy) + \frac{\partial f}{\partial \gamma}(dz - \mathrm{R}d\mathrm{Z}) = 0.$$

[1] Si l'on porte les valeurs de α, β, γ dans l'équation

$$f(\alpha, \beta, \gamma, \mathrm{R}) = 0,$$

on obtient

$$f(x - \mathrm{XR},\ y - \mathrm{YR},\ z - \mathrm{ZR},\ \mathrm{R}) = 0,$$

et pour former l'équation aux dérivées particlles cherchée, il suffit d'exprimer que l'équation précédente, considérée comme devant déterminer l'inconnue R, a une racine double.

On pourra consulter sur ce sujet et sur les questions analogues relatives à la ligne droite, différents Mémoires de MM. Klein et Lie. Voir en particulier *Mathematische Annalen*, t. V, et *Göttinger Nachrichten*, 1871.

D'ailleurs X, Y, Z étant les cosinus des angles que fait la normale avec les axes, on a

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

ou

$$(42) \qquad X\,(dx - R\,dX) + Y\,(dy - R\,dY) + Z\,(dz - R\,dZ) = 0.$$

Supposons que l'on n'ait pas

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{X} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \beta}}{Y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \gamma}}{Z},$$

par exemple, que les deux derniers rapports ne soient pas égaux. Alors, si l'on se déplace sur la surface dans une direction telle que l'on ait

$$dx = R\,dX$$

en vertu des équations (41), (42), on trouvera aussi

$$dy - R\,dY = 0, \qquad dz - R\,dZ = 0.$$

R est donc le rayon de courbure, et cette direction dans laquelle on se déplace est celle de la ligne de courbure; α, β, γ sont les coordonnées du centre, et l'équation aux dérivées partielles du second ordre est bien satisfaite.

Cette conclusion cesse d'être exacte pour la solution de l'équation du premier ordre qui satisfait aux relations

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}{X} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \beta}}{Y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \gamma}}{Z}.$$

On verra facilement qu'il y a, en effet, une intégrale satisfaisant à ces conditions : c'est la solution singulière de l'équation du premier ordre.

Cette équation du premier ordre peut d'ailleurs être obtenue sous une forme assez remarquable. Reprenons l'équation proposée

$$f(\alpha, \beta, \gamma, R) = 0.$$

Il est clair que, si l'on connaissait une autre relation du même genre,

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, R) = 0,$$

la question proposée serait résolue. Il n'y aurait qu'à chercher l'enveloppe des sphères dont les paramètres satisfont à ces deux équations.

Nous savons que les sphères seront osculatrices à cette enveloppe et, par conséquent, les deux points de contact que chaque sphère a, en général, avec son enveloppe seront confondus ici en un seul. Exprimons cette propriété; soit

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\mathrm{R}^2$$

l'équation de la sphère.

Les points de contact de cette sphère avec son enveloppe sont définis par les formules

$$x-\alpha=\lambda\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha},$$

$$y-\beta=\lambda\frac{\partial f}{\partial\beta}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

$$z-\gamma=\lambda\frac{\partial f}{\partial\gamma}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma},$$

$$-\mathrm{R}=\lambda\frac{\partial f}{\partial\mathrm{R}}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{R}}.$$

En substituant dans l'équation de la sphère les valeurs de $x-\alpha$, etc., on trouvera

$$\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial\alpha}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial\beta}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2+\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial\gamma}+\mu\frac{\partial\varphi}{\gamma}\right)^2=\left(\lambda\frac{\partial f}{\partial\mathrm{R}}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{R}}\right)^2,$$

équation qui, en général, détermine deux valeurs distinctes du rapport $\frac{\lambda}{\mu}$, correspondantes respectivement aux deux points de contact. Ici, il faut que ces deux valeurs soient égales, ce qui donne l'équation

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\gamma}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial\mathrm{R}}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}\right)^2-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{R}}\right)^2\right]$$
$$=\left[\frac{\partial f}{\partial\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}+\frac{\partial f}{\partial\gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial\gamma}-\frac{\partial f}{\partial\mathrm{R}}\frac{\partial\varphi}{\partial\mathrm{R}}\right]^2.$$

On intégrera, si on le peut, cette équation aux dérivées partielles du premier ordre en φ; et, une fois cette fonction obtenue, la solution s'achèvera par de simples différentiations et éliminations.

Les théories précédentes s'étendent, sans aucune difficulté, à un nombre quelconque de variables.

Considérons une équation déterminée, contenant $n+2$ paramètres

$$f(z, x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}) = 0. \tag{43}$$

On établira, entre ces paramètres, z et ses dérivées premières et secondes, les équations suivantes

$$f = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial z} p_1 = 0, \ \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial z} p_n = 0. \tag{44}$$

On exprimera ensuite que les équations

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0, \ \ldots, d\left(\frac{\partial f}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial f}{\partial z}\right) = 0,$$

qui sont homogènes en $dx_1, \ldots, dx_n$ et sont au nombre de n, sont compatibles. Cela nous donnera une équation qui, jointe aux formules (44), permettra d'exprimer les $n+2$ paramètres en fonction de z et de ses dérivées des deux premiers ordres.

Ces paramètres étant ainsi définis, toute équation du second ordre

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}) = 0$$

s'intégrera de la même manière que dans le cas, traité plus haut, de deux variables indépendantes.

§ 41. DU CONTACT POUR LES SURFACES À UN NOMBRE QUELCONQUE DE PARAMÈTRES.

La théorie du contact des courbes planes a été généralisée, pour les surfaces à quatre paramètres, dans l'article précédent.

Nous allons montrer comment on pourra l'étendre, quand on emploiera des surfaces à un nombre quelconque de paramètres.

Considérons, par exemple, une surface à cinq paramètres (Σ), représentée par l'équation

$$z = f(x, y, a_1, \ldots, a_5).$$

Si l'on veut assurer le contact le plus intime de (Σ) avec une surface quelconque, on assujettira d'abord (Σ) aux mêmes conditions que précédemment, et l'on disposera des arbitraires de telle manière que z, p, q soient les mêmes pour les deux surfaces et que dp, dq soient les mêmes pour une direction déterminée; ce qui donnera les conditions

$$(45)\quad \begin{cases} z = z_1, \quad p = p_1, \quad q = q_1, \\ r\,dx + s\,dy = r_1\,dx + s_1\,dy, \quad s\,dx + t\,dy = s_1\,dx + t_1\,dy, \end{cases}$$

z_1 désignant la fonction f et p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, ses dérivées par rapport à x, y. Mais les équations précédentes ne suffisent pas à déterminer les cinq paramètres, en fonction de z et de ses dérivées des deux premiers ordres.

Nous écrirons alors que, pour la direction, définie par les formules précédentes, de la ligne d'osculation, direction pour laquelle déjà dp, dq, et par conséquent d^2z, sont les mêmes pour les deux surfaces, d^3z aura aussi la même valeur; ce qui donnera, en appelant $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \varepsilon_1$ les dérivées troisièmes de z et de z_1 respectivement, la relation

$$(46)\quad (\alpha - \alpha_1)\,dx^3 + 3(\beta - \beta_1)\,dx^2\,dy + 3(\gamma - \gamma_1)\,dx\,dy^2 + (\varepsilon - \varepsilon_1)\,dy^2 = 0.$$

Cette équation, jointe aux précédentes, permettra d'exprimer les cinq paramètres en fonction des coordonnées du point de contact et des dérivées des trois premiers ordres de z. Elle signifie, comme on le vérifiera aisément, que la courbe d'intersection des deux surfaces a, au point de contact, non un rebroussement ordinaire, mais un point où deux branches de courbe viennent se toucher.

Les paramètres étant considérés comme des fonctions des dérivées, on pourra ici considérer encore une équation

$$\text{(47)} \qquad F(a_1, a_2, \ldots, a_5) = 0,$$

qui sera nécessairement du troisième ordre. Désignons par la caractéristique δ les différentielles prises en faisant varier ces cinq paramètres seulement. Si nous différentions les formules (45) en supposant que l'on se déplace suivant la ligne d'osculation, nous aurons, en tenant compte de ces relations (45) et de la formule (46),

$$\delta z_1 = 0, \qquad \delta p_1 = 0, \qquad \delta q_1 = 0,$$
$$\delta r_1\, dx^2 + 2\delta s_1\, dx\, dy + \delta t_1\, dy^2 = 0.$$

Ces équations sont au nombre de quatre. Elles déterminent donc les rapports de $da_1, \ldots, da_5$, et nous montrent que ces différentielles seront de la forme

$$da_i = \Omega_i \Pi,$$

Π étant un facteur de la forme $M dx + N dy$ et qui contient seul les dérivées du quatrième ordre, les quantités Ω_i dépendant seulement des cinq paramètres et de la valeur de $\frac{dy}{dx}$ correspondante à la ligne d'osculation.

Cela posé, différentions l'équation proposée (47). Nous aurons

$$\text{(48)} \qquad \Pi\left(\sum \frac{\partial F}{\partial a_i}\Omega_i\right) = 0.$$

En égalant le facteur Π à zéro, nous aurons la solution générale. Dans ce cas, les cinq paramètres demeureront constants sur chaque ligne d'osculation; et, par conséquent, sur toute l'étendue de la surface ils seront fonctions les uns des autres. On devra donc poser

$$a_2 = f(a_1), \qquad a_3 = \varphi(a_1), \qquad a_4 = \psi(a_1),$$

a_5 étant défini par l'équation (47), et chercher l'enveloppe de la surface (Σ). On aura ainsi une première intégrale avec trois fonctions arbitraires.

Mais si l'on égale à zéro le second facteur de l'équation (48)

$$\sum \frac{\partial F}{\partial a_i}\Omega_i = 0, \tag{49}$$

on pourra éliminer les cinq paramètres et $\frac{dy}{dx}$ entre les équations (45), (47), (49); et l'on sera ainsi conduit à une équation du second ordre, qui sera, en quelque sorte, une intégrale singulière de l'équation proposée.

Ainsi cette généralisation nouvelle de la théorie du contact donne lieu aux mêmes remarques que dans le cas des surfaces à quatre paramètres.

Si la surface (Σ) contient six paramètres, on pourra en disposer de manière à assurer le contact complet du second ordre, et l'on déterminera ainsi les six paramètres $a_1, \ldots, a_6$, en fonction des coordonnées du point de contact et des dérivées des deux premiers ordres; mais il est bien remarquable que, précisément dans ce cas, où la théorie du contact devient si facile, les équations aux dérivées partielles que l'on doit associer à cette théorie ne se prêtent plus à l'application des remarques précédentes.

En effet, si les six paramètres ont été déterminés comme on l'a indiqué, leurs différentielles satisfont aux seules équations

$$\delta z_1 = 0, \quad \delta p_1 = 0, \quad \delta q_1 = 0,$$

qui, il est vrai, ont lieu pour toutes les directions, mais ne permettent plus, pour aucune, de définir les rapports de $da_1, \ldots, da_6$.

En continuant cette étude, nous allons confirmer ce fait si intéressant et reconnaître que, toutes les fois que le contact sera plus complet que précédemment, les équations aux dérivées partielles associées ne seront pas intégrables.

Considérons, par exemple, les surfaces à sept, huit et neuf paramètres. On établira d'abord six relations par la condition que les dérivées du second ordre soient les mêmes pour les deux surfaces. Alors la courbe d'intersection aura un point triple au point de contact.

Si l'on dispose de sept paramètres, on exprimera que deux des tangentes en ce point triple sont confondues.

Si l'on dispose de huit paramètres, on exprimera que les tangentes aux trois branches de courbe sont les mêmes et, dans ce cas, l'équation approchée de la courbe d'intersection sera

$$y = ax^{\frac{4}{3}}.$$

Si l'on dispose de neuf paramètres, on ajoutera à la condition précédente une nouvelle équation, en écrivant que d^4z est le même pour les deux surfaces dans la direction de la tangente unique au point triple; et la courbe d'intersection se composera alors de deux branches, représentées approximativement par les équations

$$y = ax^{\frac{3}{2}}, \qquad y = a'x^2.$$

On s'assurera aisément que ces différentes conditions sont indépendantes du choix des axes, qu'elles subsistent après toutes les transformations auxquelles on peut soumettre les deux surfaces.

Mais elles ne permettent pas d'associer à cette théorie celle d'équations aux dérivées partielles complètement intégrables.

Considérons, en général, une surface (Σ) à $\frac{(n+1)(n+2)}{2}+k$ paramètres, k étant inférieur à $n+2$. On pourra établir $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ relations, assurant un contact du $n^{ième}$ ordre avec une surface quelconque; mais on ne pourrait obtenir un contact d'ordre $n+1$. Si k est inférieur à $n+1$, on établira k relations en exprimant, par exemple, que $k+1$ des $n+1$ tangentes à la courbe d'intersection au point de contact sont confondues. Si k est égal à $n+1$, on ajoutera la condition que $d^{n+2}z$ soit le même pour les deux surfaces, quand on se déplace dans la direction de la tangente à la courbe d'intersection, et l'on aura ainsi les équations nécessaires pour déterminer tous les paramètres. On verra facilement que les conditions ainsi posées sont indépendantes du choix des axes.

On pourrait, d'ailleurs, substituer à quelques-unes des relations posées d'autres conditions du même genre. Supposons, par exemple,

qu'après avoir assuré le contact du $n^{ième}$ ordre de deux surfaces, on dispose encore de k paramètres. Il suffira de considérer l'équation algébrique, d'ordre $n+1$, dont dépendent les tangentes à la courbe d'intersection, au point de contact des deux surfaces, et d'écrire, entre les coefficients de cette équation, k relations, qui serviront à déterminer les k paramètres laissés arbitraires. Nous avons choisi celles qui se présentent le plus directement, en exprimant que $k+1$ des tangentes sont confondues; mais on pourrait aussi écrire, par exemple, qu'il y a deux groupes de tangentes, formés, l'un de p et l'autre de $k+1-p$ tangentes confondues. Pour que les relations ainsi écrites aient quelque valeur géométrique et qu'elles puissent servir de base à des recherches intéressantes, il suffira qu'elles soient invariantes, c'est-à-dire qu'elles subsistent et ne changent pas de nature, quand on soumettra les deux surfaces à une transformation homographique, et même à une transformation par polaires réciproques.

§ 42. REMARQUE SUR UNE NOTATION NOUVELLE QUE L'ON POURRAIT EMPLOYER DANS LA THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Dans toute notre théorie, nous avons fait abstraction de toutes les difficultés relatives au cas où les dérivées partielles deviendront infinies, difficultés qu'on peut toujours supposer écartées soit par le changement des axes, soit par une substitution linéaire.

Mais dans la géométrie actuelle, on considère des transformations qui peuvent faire disparaître certaines surfaces et rejeter un plan à l'infini. Imaginons, par exemple, qu'une équation aux dérivées partielles admette comme intégrales complètes des paraboloïdes dépendant de deux paramètres; ces paraboloïdes sont tous tangents au plan de l'infini, qui devient ainsi une partie de la solution singulière et échappe aux méthodes ordinaires.

Pour lever toutes ces difficultés, il suffirait d'employer des coordonnées homogènes quelconques.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes servant à dé-

finir la position d'un point et dont les rapports seuls sont déterminés. L'équation d'un plan quelconque étant

$$m_1 X_1 + m_2 X_2 + m_3 X_3 + m_4 X_4 = 0,$$

m_1, m_2, m_3, m_4 seront les coordonnées tangentielles du plan.

Alors toute équation aux dérivées partielles se transformera en une équation

$$\Phi(x_1, \ldots, x_4, m_1, \ldots, m_4) = 0,$$

ou, pour abréger,

$$\Phi(x_i, m_k) = 0, \tag{50}$$

homogène par rapport aux coordonnées du point de contact, $x_1, \ldots, x_4$, et aussi par rapport aux coordonnées tangentielles du plan tangent, $m_1, \ldots, m_4$. Intégrer cette équation, ce sera trouver pour les variables qui y entrent des fonctions de deux variables indépendantes, telles que l'on ait identiquement

$$\begin{cases} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0, \\ m_1 dx_1 + m_2 dx_2 + m_3 dx_3 + m_4 dx_4 = 0, \end{cases} \tag{51}$$

et, par conséquent,

$$x_1 dm_1 + x_2 dm_2 + x_3 dm_3 + x_4 dm_4 = 0. \tag{51 bis}$$

On voit que cette manière de poser le problème met tout de suite en évidence la propriété de dualité dont jouit toute équation aux dérivées partielles; car, dans les formules précédentes, les deux systèmes de variables m_i et x_i jouent absolument le même rôle.

Les équations de la caractéristique prendront alors une forme beaucoup plus symétrique. Elles seront

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial m_i} + \mu x_i, \qquad \frac{dm_i}{dt} = -\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \mu' m_i. \tag{52}$$

Par un choix convenable de t et du facteur de proportionnalité,

qui figure dans les deux systèmes de variables, on pourra les ramener à la forme simple

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial m_i},\qquad \frac{dm_i}{dt}=-\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}. \tag{53}$$

La solution singulière sera définie par les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial m_1}}{x_1}=\dfrac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial m_2}}{x_2}=\dfrac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial m_3}}{x_3}=\dfrac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial m_4}}{x_4}, \\ \dfrac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}}{m_1}=\dfrac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}}{m_2}=\dfrac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3}}{m_3}=\dfrac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_4}}{m_4}, \end{cases} \tag{54}$$

qui, en vertu du théorème des fonctions homogènes, se réduisent à cinq distinctes.

Cette forme si simple que prennent les équations de la caractéristique nous met d'ailleurs sur la voie d'équations remarquables, que nous saurons intégrer.

Traitons, par exemple, l'équation aux dérivées partielles qui, écrite sous forme ordinaire, serait

$$A_4(-z+px+qy)^{\alpha}+A_1x^{\beta}p^{\alpha}+A_2y^{\beta}q^{\alpha}+A_3z^{\beta}=0.$$

Avec les notations précédentes, elle prendra la forme symétrique

$$a_1m_1^{\alpha}x_1^{\beta}+a_2m_2^{\alpha}x_2^{\beta}+a_3m_3^{\alpha}x_3^{\beta}+a_4m_4^{\alpha}x_4^{\beta}=0. \tag{55}$$

Les équations (53) de la caractéristique deviendront

$$\begin{cases} \dfrac{dm_i}{dt}=-a_i\beta x_i^{\beta-1}m_i^{\alpha}, \\ \dfrac{dx_i}{dt}=a_i\alpha x_i^{\beta}m_i^{\alpha-1}, \end{cases} \tag{56}$$

et elles sont évidemment intégrables. On en déduit, par exemple,

$$\alpha x_i\,dm_i+\beta m_i\,dx_i=0,$$

ce qui donne

$$a_im_i^{\alpha}x_i^{\beta}=\text{const.}=C_i.$$

En substituant la valeur de x_i, tirée de cette équation, dans la première des formules (56), on aura les moyens de trouver m_i; et, une fois intégrées les équations de la caractéristique, le problème pourra être regardé comme résolu.

L'équation (55) a d'ailleurs toujours une solution singulière, définie par les équations

$$a_1 m_1^{\alpha-1} x_1^{\beta-1} = a_2 m_2^{\alpha-1} x_2^{\beta-1} = a_3 m_3^{\alpha-1} x_3^{\beta-1} = a_4 m_4^{\alpha-1} x_4^{\beta-1},$$

qui, jointes à l'identité

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = 0,$$

donnent, soit l'équation ponctuelle, soit l'équation tangentielle de la solution singulière. On trouve ainsi

$$a_1^{\frac{1}{\alpha-1}} x_1^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}} + a_2^{\frac{1}{\alpha-1}} x_2^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}} + a_3^{\frac{1}{\alpha-1}} x_3^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}} + a_4^{\frac{1}{\alpha-1}} x_4^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-1}} = 0,$$

ou, en coordonnées tangentielles,

$$a_1^{\frac{1}{\beta-1}} m_1^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}} + a_2^{\frac{1}{\beta-1}} m_2^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}} + a_3^{\frac{1}{\beta-1}} m_3^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}} + a_4^{\frac{1}{\beta-1}} m_4^{\frac{\beta-\alpha}{\beta-1}} = 0.$$

Mais nous allons surtout nous attacher à une équation aux dérivées partielles qui est la généralisation de l'équation différentielle de Jacobi

$$L(x\,dy - y\,dx) + M\,dx + N\,dy = 0,$$

où L, M, N sont trois polynômes du premier degré en x, y.

L'équation analogue à la précédente pour le cas de deux variables indépendantes est évidemment

$$L(z - px - qy) + Mp + Nq + R = 0,$$

où L, M, N, R sont des polynômes quelconques du premier degré en x, y, z.

Notre système de notations la transforme dans l'équation suivante

$$\sum\sum a_{ik}\, m_i\, x_k = 0\,,$$

linéaire à la fois par rapport aux deux systèmes de variables.

Pour débarrasser la solution de cette équation de difficultés purement algébriques, ramenons-la, par une substitution linéaire, à la forme

$$a_1\, m_1\, x_1 + a_2\, m_2\, x_2 + a_3\, m_3\, x_3 + a_4\, m_4\, x_4 = 0\,,$$

ce qui est, en général, possible.

Les équations de la caractéristique deviendront

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i\, x_i, \qquad \frac{dm_i}{dt} = -\,a_i\, m_i.$$

Leur intégration donnera les valeurs suivantes

$$\rho x_i = x_i^0\, e^{a_i t}, \qquad \sigma m_i = m_i^0\, e^{-a_i t},$$

ρ et σ étant des facteurs de proportionnalité. Pour obtenir une surface intégrale, il faudra que les valeurs initiales x_i^0, m_i^0 satisfassent aux équations

$$\sum m_i^0\, x_i^0 = 0\,, \qquad \sum m_i^0\, dx_i^0 = 0.$$
$$\sum a_i\, m_i^0\, x_i^0 = 0\,,$$

Par exemple, la surface intégrale, formée des caractéristiques tangentes à un plan dont l'équation est

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_4 x_4 = 0\,,$$

s'obtiendra en éliminant t entre les deux équations

$$\alpha_1 x_1\, e^{-a_1 t} + \ldots + \alpha_4 x_4\, e^{-a_4 t} = 0\,,$$
$$a_1 \alpha_1 x_1\, e^{-a_1 t} + \ldots + a_4 \alpha_4 x_4\, e^{-a_4 t} = 0.$$

La théorie précédente s'étend évidemment à un nombre quelconque de variables indépendantes. Elle est la généralisation de celle qui a été proposée par Clebsch pour les équations différentielles ordinaires.

Les indications bibliographiques données dans ce Mémoire se rapportent uniquement aux travaux les plus récents, et je ne me suis nullement proposé de faire l'historique de cette question des solutions singulières, qui a donné naissance à un si grand nombre de travaux. Cependant, en terminant je dois ajouter la remarque suivante.

La question traitée aux articles 38 et 39, à savoir : trouver toutes les équations aux dérivées partielles admettant deux intégrales intermédiaires, a été aussi résolue par M. Lie, dans un Mémoire intitulé : *Nueue Integrations-Methode der Monge-Ampereschen Gleichung*. Il est vrai que ce Mémoire, publié dans le tome I des *Archiv for Mathematik og Naturvidenskab*, a paru à la fin de 1876 ou au commencement de 1877. Il est donc postérieur à la présentation de mes recherches à l'Académie, qui a eu lieu le 29 mai 1876. Mais M. Lie veut bien m'informer que les propositions qui font l'objet de son Mémoire de 1876-1877 avaient déjà été énoncées par lui dans une Note présentée en 1872 à l'Académie de Christiania, sous ce titre : *Kurzes Resume mehrerer neuen Theorien*.

C'est au moment de terminer l'impression que j'ai eu connaissance de tous ces faits, et je dois remercier M. Lie, qui a bien voulu me transmettre les renseignements qui précèdent.

Darboux, M G
Memoire sur les solutions singulieres des equations aux derivees partielles du premier order.

UNIVERSITY OF TORONTO
DEPT. OF MATHEMATICS
LIBRARY